ОГЛАВЛЕНИЕ

1. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

После обеда герцог сказал:
– Во всяком случае, надо приготовить что-нибудь на "бис".
– А что это значит – на "бис"?

Марк Твен. Приключения Гекльберри Финна

1.1. Равномерная сходимость функциональных рядов

Функциональным называется ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z), \tag{1.1.1}$$

членами которого являются заданные на некотором множестве $\Omega \subset \mathbf{C}_z$ функции $\varphi_k = \varphi_k(z), k = 0, 1, \ldots$. Поскольку в фиксированной точке $z \in \Omega$ ряд (1.1.1) является числовым рядом, то его *сходимость* к сумме $S = S(z)$ означает

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n > N \quad (|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon),$$

где

$$S_n(s) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(z)$$

называется *частичной суммой* ряда (1.1.1).

Ряд (1.1.1) называется *сходящимся на множестве* Ω, если он сходится в каждой точке этого множества. Сходящийся на множестве Ω ряд (1.1.1) называется *равномерно сходящимся*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n > N \quad \forall z \in \Omega \quad (|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon).$$

ТЕОРЕМА 1.1.1 (критерий Коши[1] равномерной сходимости функциональных рядов). *Ряд (1.1.1) равномерно сходится к сумме $S = S(z)$ на множестве Ω точно тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbf{N} \quad \forall z \in \Omega$$

$$(|\sum_{k=n+1}^{n+p} \varphi_k(z)| < \varepsilon).$$

◁ Пусть ряд (1.1.1) равномерно сходится на множестве Ω к сумме $S(z)$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbf{N} \quad \forall z \in \Omega$$

$$(|S(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2}) \wedge (|S(z) - S_{n+p}(z)| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Отсюда

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} \varphi_k(z)| = |S_{n+p}(z) - S_n(z)| \le$$

$$|S(z) - S_n(z)| + |S(z) - S_{n+p}(z)| < \varepsilon.$$

Теперь пусть выполнено условие Коши. В силу критерия Коши для числовых рядов ряд (1.1.1) сходится в каждой точке $z \in \Omega$ к сумме $S(z)$. Покажем, что эта сходимость равномерная. Поскольку

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} \varphi_k(z)| = |S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

то переходя к пределу при $p \to +\infty$, получим

$$|S(z) - S_n(z)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. ▷$$

Как и в случае функциональных рядов действительной переменной имеет место следующее

СЛЕДСТВИЕ 1.1.1 (необходимый признак равномерной сходимости функционального ряда). *Пусть ряд (1.1.1)*

[1] Огюстен Луи Коши (1789 - 1857) – французский математик и механик, один из творцов математического анализа.

равномерно сходится на множестве Ω. *Тогда последовательность его членов равномерно сходится на* Ω *к нулю.*

По аналогии с последовательностью функций действительной переменной последовательность $\{\varphi_n(z)\}$ функций комплексной переменной равномерно сходится к функции $\varphi(z)$ на множестве Ω, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n > N \quad \forall z \in \Omega \quad (|\varphi_n(z) - \varphi(z)| < \varepsilon.$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.1.1. Доказать следствие 1.1.1.

Введем еще одно полезное понятие. Ряд (1.1.1) называется *абсолютно* (равномерно или нет) сходящимся, если сходится (равномерно или нет) ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_k(z)|.$$

ТЕОРЕМА 1.1.2 (признак Вейерштрасса[2] абсолютной и равномерной сходимости функционального ряда). *Пусть при всех* $z \in \Omega$ *и всех* $k \in \mathbf{N}$

$$|\varphi_k(z)| \le a_k,$$

причем ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

сходится. Тогда ряд (1.1.1) сходится абсолютно и равномерно на множестве Ω.

◁ Поскольку

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |\varphi_k(z)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon,$$

то утверждение теоремы получается из критерия Коши для рядов и теоремы 1.1.1. ▷

[2]Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815 - 1897) – немецкий математик, наряду с О. Коши, основоположник строгих методов в математическом анализе.

В дальнейшем нам потребуется одно свойство равномерно сходящихся функциональных рядов.

ТЕОРЕМА 1.1.3. *Сумма* $S = S(z)$ *равномерно на множестве* Ω *сходящегося ряда (1.1.1), членами которого являются непрерывные функции, есть непрерывная функция.*

◁ Пусть $z_0 \in \Omega$ – предельная точка множества Ω. В силу равномерной сходимости ряда (1.1.1) при любом $\varepsilon > 0$ найдется $N \in \mathbf{N}$ такое, что при всех $n > N$ имеем

$$|S(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}, |S(z_0) - S_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

В силу непрерывности частичной суммы $S_n(z)$ при любом $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при всех $z \in \mathcal{O}_{z_0}^{\delta} \cap \Omega$ имеет место

$$|S_n(z) - S_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Окончательно получаем

$$|S(z) - S(z_0)| \le |S(z) - S_n(z)| + |S_n(z) - S_n(z_0)| +$$
$$|S(z_0) - S_n(z_0)| < \varepsilon$$

при всех $z \in \mathcal{O}_{z_0}^{\delta} \cap \Omega$.▷

1.2. Степенные ряды. Радиус сходимости

Степенным называется функциональный ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \tag{1.2.1}$$

где $z_0 \in \mathbf{C}$ некоторая фиксированная точка, а числа $a_k \in \mathbf{C}, k = 0, 1, \ldots$ – называются *коэффициентами* ряда. Вводя замену $\xi = z - z_0$ и переобозначая ξ через z, перепишем ряд (1.2.1) в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \tag{1.2.2}$$

Каждый член ряда (1.2.2) определен на всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$, и по крайней мере в точке $z = 0$ ряд (1.2.2) сходится.

Поскольку при $z = z_0$ или при $z = 0$ первый член ряда (1.2.1) или (1.2.2) не определен, то, строго говоря, мы под выражениями (1.2.1) или (1.2.2) понимаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

соответственно.

ПРИМЕР 1.2.1. Ряд

$$1 + \sum_{k=0}^{\infty} k^k z^k$$

сходится только в точке $z = 0$. В самом деле, пусть $z \neq 0$, тогда для всех достаточно больших $k \in \mathbf{N}$ $\quad |kz| > 2$ и, следовательно, $|k^k z^k| > 2^k$. Таким образом, в точке $z \neq 0$ нарушено необходимое условие сходимости числового ряда.

ПРИМЕР 1.2.2. Ряд

$$1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^k}$$

сходится во всей комплексной плоскости. Действительно, в любой точке $z \in \mathbf{C}$ при достаточно больших $k \in \mathbf{N}$ имеем

$$\left|\frac{z}{k}\right| < \frac{1}{2},$$

т.е.

$$\left|\frac{z^k}{k^k}\right| < \frac{1}{2^k}.$$

Поэтому сходимость ряда вытекает из признака Вейерштрасса для равномерной сходимости функциональных рядов и из сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}.$$

ПРИМЕР 1.2.3. Как нетрудно убедиться, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

сходится при $|z| < 1$ и расходится при $|z| > 1$.

ТЕОРЕМА 1.2.1 (первая теорема Абеля[3]). *Если ряд (1.2.2) сходится в точке $z_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно и равномерно на множестве $\{z \in \mathbf{C} : |z| < |z_0|\}$.*

◁ Поскольку числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_0^k$$

сходится, то в силу необходимого признака сходимости

$$\lim_{k \to \infty} a_k z_0^k = 0.$$

Отсюда следует, что существует число $a \in \mathbf{R}_+$ такое, что $|a_k z_0^k| < a, k = 0, 1, \ldots$. Поэтому

$$|a_k z^k| = \left| a_k z_0^k \left(\frac{z^k}{z_0^k} \right) \right| \leq a q^k,$$

где $q = \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$. Поскольку ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a q^k$$

сходится, то в силу признака Вейерштрасса ряд (1.2.2) сходится абсолютно и равномерно.▷

СЛЕДСТВИЕ 1.2.1. *Пусть ряд (1.2.2) расходится в точке $z_0 \in \mathbf{C}$. Тогда он расходится в любой точке $z \in \mathbf{C}, |z| > |z_0|$.*

◁ Пусть ряд (1.2.2) сходится в точке z. Тогда в силу теоремы 1.2.1 он должен сходиться в точке z_0. Противоречие.▷

[3] Нильс Хенрик Абель (1802-1829) – норвежский математик. Работы посвящены алгебре, теории функций и математическому анализу.

ТЕОРЕМА 1.2.2. *Для каждого степенного ряда (1.2.2) существует окружность* $\{z \in \mathbf{C} : |z| = R\}(0 \le R \le \infty)$, *внутри которой этот ряд сходится, а вне – расходится.*

◁ Для степенных рядов, сходящихся в единственной точке $z = 0$ или на всей комплексной плоскости $\mathbf{C}, R$ соответственно равно 0 или $+\infty$. Рассмотрим случай, когда ряд (1.2.2) в некоторой точке z_0 сходится, а в некоторой точке z_1 расходится.

Обозначим через I_1 отрезок с концами в точках z_0 и z_1 длиной $|z_1 - z_0|$. Поделим этот отрезок пополам и обозначим через I_2 ту половину отрезка, один конец которого является точкой сходимости, а другой – точкой расходимости ряда (1.2.2). Продолжая этот процесс бесконечно, получим последовательность $\{I_n\}$ вложенных друг в друга отрезков, причем длина отрезка I_n равна $|z_1 - z_0|/2^{n-1}$. В силу теоремы Коши - Кантора [4] существует единственная точка z', принадлежащая всем отрезкам. Положим $R = |z'|$.

Действительно, пусть точка z такова, что $|z| < R$. Выберем число n настолько большим, чтобы конец z_n отрезка I_n, являющийся точкой сходимости ряда (1.2.2), был таким, чтобы $|z_n| > |z|$. В силу первой теоремы Абеля ряд (1.2.2) сходится в точке z. Пусть теперь $|z| > R$. Выберем число n настолько большим, чтобы конец z'_n отрезка I_n, являющийся точкой расходимости ряда (1.2.2), был таким, чтобы $|z| > |z'_n|$. В силу следствия 1.2.1 заключаем, что ряд (1.2.2) в точке z расходится.▷

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.1. Величина R, определяемая теоремой 1.2.2, называется *радиусом сходимости*, а круг $\{z \in \mathbf{C} : |z| < R\}$ – *кругом сходимости* ряда (1.2.2).

ТЕОРЕМА 1.2.3 (формула Коши - Адамара[5]). *Пусть*

$$L = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

[4]Георг Кантор(1845 - 1918) – немецкий математик. Основоположник теории множеств.

[5]Жак Адамар (1865 - 1963) – французский математик. Основные исследования посвящены тории чисел, теории аналитических функций и дифференциальным уравнениям.

Тогда радиус сходимости R ряда (1.2.2) определяется соотношением

$$R = L^{-1},$$

причем $R = +\infty$ *при* $L = 0$ *и* $R = 0$ *при* $L = +\infty$.

◁ Наряду со степенным рядом (1.2.2) рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k, \tag{1.2.3}$$

где $x = |z|$ и $\alpha_k = |a_k| \quad k = 0, 1, \ldots$. Для ряда (1.2.3) найдем радиус сходимости R', пользуясь формулой Коши - Адамара для действительных рядов. Положив $R = R'$, получим требуемое.▷

1.3. Свойства степенных рядов

ТЕОРЕМА 1.3.1. *(i) Степенной ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{1.3.1}$$

сходится равномерно и абсолютно в круге $\{z \in \mathbf{C} : |z| \le r\}$ *при любом* $r \in (0, R)$.

(ii)Сумма степенного ряда (1.3.1) непрерывна в любой точке его круга сходимости.

◁ Утверждение (i) вытекает из первой теоремы Абеля и признака Вейерштрасса. Утверждение (ii) есть следствие утверждения (i) и теоремы 1.1.3.▷

ТЕОРЕМА 1.3.2.*Пусть сумма* $S(z)$ *ряда (1.3.1) равна нулю в некотором круге* $\{z \in \mathbf{C} : |z| \le r\}, r \in (0, R)$. *Тогда* $a_k = 0, k = 0, 1, \ldots$.

◁ Допустим противное и обозначим через l индекс первого отличного от нуля коэффициента ряда (1.3.1). По условию сумма $S^*(z)$ ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{l+k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k-l}$$

равна нулю всюду в круге $\{z \in \mathbf{C} : |z| \le r\}$ кроме точки $z = 0$. Ввиду того, что сумма $S_*(z)$ ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{l+k} z^k$$

непрерывна при $|z| < r$ и $S_*(0) = 0$, можно указать число $\delta > 0$ такое, что при $|z| < \delta$ имеем

$$|S_*(z)| = |\sum_{k=1}^{\infty} a_{l+k} z^k| \le \frac{1}{2}|a_l|.$$

Поэтому

$$|S^*(z)| = |S_*(z) + a_l| \ge ||a_l| - |S_*(z)|| \ge \frac{1}{2}|a_l|,$$

а это противоречит равенству $S^*(z) = 0$, если $|z| < \delta$.$\triangleright$

СЛЕДСТВИЕ 1.3.1. *Пусть радиусы сходимости R_1 и R_2 рядов*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = S_1(z), \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = S_2(z) \qquad (1.3.2)$$

отличны от нуля и в круге

$$\{z \in \mathbf{C} : |z| \le r\}, r \in (0, min\{R_1, R_2\})$$

выполняется равенство $S_1(z) = S_2(z)$. Тогда $a_k = b_k, k = 0, 1, \ldots$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.3.1. Доказать следствие 1.3.1.

Следствие 1.3.1 устанавливает свойство единственности степенного ряда.

ТЕОРЕМА 1.3.3. *Пусть радиусы сходимости R_1 и R_2 рядов (1.3.3) отличны от нуля и $R = min\{R_1, R_2\}$. Тогда абсолютно и равномерно сходятся сумма*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) z^k \qquad (1.3.3)$$

и произведение

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0) z^k \qquad (1.3.4)$$

рядов (1.3.2), причем радиусы сходимости рядов (1.3.3) и (1.3.4) не меньше R.

$\triangleleft$ Доказательство вытекает из теоремы о двойных рядах и признака Вейерштрасса для равномерной сходимости функциональных рядов.$\triangleright$

ТЕОРЕМА 1.3.4. *Пусть радиус сходимости R степенного ряда (1.3.1) отличен от нуля. Тогда его сумма $S(z)$ является голоморфной в круге сходимости функцией.*

$\triangleleft$ Сначала заметим, что R является радиусом сходимости ряда

$$S'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}. \qquad (1.3.5)$$

Это следует из формулы Коши - Адамара и очевидного равенства

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} (k|a_k|)^{\frac{1}{k-1}} = \overline{\lim_{k\to\infty}} ((k|a_k|)^{\frac{1}{k}})^{\frac{k}{k-1}} = \overline{\lim_{k\to\infty}} |a_k|^{\frac{1}{k}}.$$

Из абсолютной сходимости ряда (1.3.5) при $|z| < R$ следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n > N \quad \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k| r^{k-1} < \frac{e}{3} \right), \qquad (1.3.6)$$

если только $r \in (0, R)$. Далее,

$$\left| \frac{S(z+\Delta z) - S(z)}{\Delta z} - S'(z) \right| \le$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\frac{(z+\Delta z)^k - z^k}{\Delta z} - k z^{k-1} \right) \right| +$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{(z+\Delta z)^k - z^k}{\Delta z} \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} k a_k z^{k-1} \right| =$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \left((z+\Delta z)^{k-1} + (z+\Delta z)^{k-2} z + \ldots + z^{k-1} - k z^{k-1} \right) \right| +$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \left((z+\Delta z)^{k-1} + (z+\Delta z)^{k-2} z + \ldots + z^{k-1} \right) \right| +$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} k a_k z^{k-1}\right|$$

(Здесь мы воспользовались формулой $a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + ... + b^{k-1})$).

Теперь пусть $|z + \Delta z| < r$. Тогда из непрерывности первого слагаемого и соотношения (1.3.6) имеем

$$\left|\frac{S(z+\Delta z) - S(z)}{\Delta z} - S'(z)\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда сразу вытекает требуемое.$\triangleright$

1.4. Определение и свойства аналитических функций

Функция f, определенная в области $\Omega \subset \mathbf{C}$, называется *аналитической* в этой области, если в окрестности любой точки $z_0 \in \Omega$ она представляется в виде степенного ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

радиус сходимости которого не меньше, чем расстояние d от z_0 до границы Γ области Ω.

В силу определения аналитическая функция обладает всеми свойствами степенных рядов, а именно:

(i) аналитическая функция непрерывна;

(ii) сумма и произведение аналитических функций являются аналитическими функциями;

(iii) аналитическая функция голоморфна.

Однако кроме этого аналитические функции обладают еще целым рядом весьма специфических свойств, к изучению которых мы и переходим.

ТЕОРЕМА 1.4.1. *Пусть в областях Ω_f и Ω_φ заданы аналитические функции f и φ, которые равны друг другу на некотором множестве $\Omega \subset \Omega_f \cap \Omega_\varphi$, имеющие хотя бы одну предельную точку $z_0 \in \Omega_f \cap \Omega_\varphi$. Тогда $f(z) = \varphi(z)$ при всех $z \in \Omega_f \cap \Omega_\varphi$.*

$\triangleleft$ Рассмотрим последовательность $\{z_n\} \subset \Omega$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, и пусть d - расстояние от точки z_0 до границы Γ области $\Omega_f \cap \Omega_\varphi$. Тогда в окрестности $\mathcal{O}_{z_0}^{\rho} = \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| < \rho\}$, где $\rho < d$, функции f и φ разлагаются в степенные ряды

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, \varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k. \qquad (1.4.1)$$

При всех n, больших некоторого номера $N \in \mathbf{N}$, все точки z_n лежат в окрестности $\mathcal{O}_{z_0}^{\rho}$. Поскольку $f(z_n) = \varphi(z_n)$, то, подставив z_n в (1.4.1), получим $a_0 = b_0$ при переходе к пределу при $n \to \infty$ в силу непрерывности степенных рядов.

Значит, для всех точек z_n, лежащих в окрестности $\mathcal{O}_{z_0}^{\rho}$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (z_n - z_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z_n - z_0)^{k-1}.$$

Отсюда при $n \to \infty$ получим $a_1 = b_1$. Продолжая этот процесс, приходим к заключению, что $a_k = b_k \forall k \in \mathbf{N}$ и, стало быть, $f(z) = \varphi(z)$ в окрестности $\mathcal{O}_{z_0}^{\rho}$.

Возьмем теперь точку $z^* \in \Omega_f \cap \Omega_\varphi$. Соединим точки z_0 и z^* ломаной, лежащей в $\Omega_f \cap \Omega_\varphi$, и рассмотрим окрестность $\mathcal{O}_{z_1}^{\rho_1} = \{z \in \mathbf{C} : |z - z_1| < \rho_1\}$, где точка z_1 лежит на пересечении ломаной и окружности $\{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| = \rho\}$, а ρ_1 меньше расстояния между ломаной и границей Γ. Передвигая центр окрестности $\mathcal{O}_{z_0}^{\rho}$ вдоль ломаной и повторяя приведенные выше рассуждения, получим требуемое. $\triangleright$

Доказанная теорема устанавливает *единственность аналитической функции.* Теперь мы покажем, что запас аналитических функций достаточно большой, в частности, любая голоморфная функция является аналитической.

ТЕОРЕМА 1.4.2(теорема Тейлора[6]). *Голоморфная в области Ω функция f аналитична в этой области.*

$\triangleleft$ Пусть точка $z_0 \in \Omega$ и d - расстояние от z_0 до границы Γ области Ω. Выберем окрестность $\mathcal{O}_{z_0}^{\rho} = \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| < \rho\}$, где

[6]Брук Тейлор (1685 - 1731) – английский математик. Основные работы относятся к математическому анализу, механике, баллистике.

$\rho \in (0, d)$. Применяя интегральную формулу Коши, получим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} d\xi,$$

где γ – окружность $\{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| = \rho\}$, а точка $z \in \mathcal{O}^{\rho}_{z_0}$.

Поскольку

$$\left|\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{\rho} = q < 1, \forall z \in \mathcal{O}^{\rho}_{z_0},$$

то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^k \tag{1.4.2}$$

сходится абсолютно и равномерно в окрестности $\mathcal{O}^{\rho}_{z_0}$, причем его сумма, очевидно, равна

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}}. \tag{1.4.3}$$

Отсюда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^k d\xi.$$

Покажем, что

$$\int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^k d\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi (z - z_0)^k. \tag{1.4.4}$$

Обозначим через $S_n(\xi)$ частичную сумму ряда (1.4.2), а через $S(\xi)$ - его сумму (1.4.3). В силу равномерной сходимости ряда (1.4.2) при любом $\varepsilon > 0$ найдется $N \in \mathbf{N}$ такое, что при $n > N$

$$|S(\xi) - S_n(\xi)| < \varepsilon$$

при всех $\xi \in \gamma$. Отсюда

$$\left|\int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \cdot (S(\xi) - S_n(\xi)) d\xi\right| \le$$

$$\frac{1}{\rho}\int\limits_{\gamma} |f(\xi)| \cdot |S(\xi) - S_n(\xi)| \cdot |d\xi| < \varepsilon \frac{M}{\rho},$$

где $M = \max\limits_{\xi \in \gamma} |f(\xi)|$. Поскольку

$$\int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} S_n(\xi) d\xi = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi (z - z_0)^k,$$

то равенство (1.4.4) доказано.

Суммируя сказанное, получим

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \tag{1.4.5}$$

где

$$a_k = \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}. \tag{1.4.6}$$

Поскольку ряд (1.4.2) для каждой фиксированной точки $z \in \mathcal{O}^{\rho}_{z_0}$ сходится равномерно относительно $\xi \in \gamma$, а коэффициенты (1.4.6) одни и те же для всех $\rho \in (0, d)$, то радиус сходимости ряда (1.4.5) не меньше, чем d.▷

Как и в теории функций действительной переменной ряд (1.4.5), коэффициенты которого вычисляются по формулам (1.4.6), называется *рядом Тейлора* голоморфной функции f.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4.1. Из теорем 1.3.4 и 1.4.2 вытекает, что аналитичность функции f в области Ω тождественна ее голоморфности в этой же области, а голоморфность тождественна аналитичности. Поэтому в дальнейшем мы не будем различать между собой аналитические и голоморфные функции.

1.5. Аналитическое продолжение основных элементарных функций

Пусть функции f и φ голоморфны в областях Ω_f и Ω_φ соответственно, причем $\Omega_\varphi \subset \Omega_f$ и $f(z) = \varphi(z)\ \forall z \in \Omega_\varphi$. Тогда в силу теоремы 1.4.1 существует точно одна аналитическая в Ω_f функция, совпадающая с функцией φ на Ω_φ. Очевидно, это функция

f. Именно она называется *аналитическим продолжением* функции φ с области Ω_φ на область Ω_f.

Основной задачей аналитического продолжения функции f, определенной на некотором множестве Ω, является такое распространение определения этой функции на возможно более широкую область $\Omega_f \supset \Omega$, при котором функция f была бы аналитичной в области Ω_f. Ниже мы покажем, как решить эту задачу для основных элементарных функций.

Начнем с целой показательной функции $w = e^z$. Поскольку

$$(e^z)^{(k)} = e^z, \forall k \in \mathbf{N},$$

то любая производная этой функции в точке нуль равна единице. Из (1.4.5) и (1.4.6) легко найти ряд Тейлора функции $w = e^z$ в точке нуль

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}. \tag{1.5.1}$$

Найдем радиус сходимости R ряда (1.5.1). Для этого рассмотрим

$$(k!)^2 = (1 \cdot k)(2 \cdot (k-1))... = \prod_{l=0}^{k} l(k-l+1)$$

и заметим, что

$$l(k-l+1) = (k+1)l - l^2 \geq k, l = 1, 2, ..., k.$$

Отсюда

$$(k!)^2 \geq k^k,$$

или

$$\left(\frac{1}{k!}\right)^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Поэтому

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k!}} \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0.$$

Значит, в силу формулы Коши - Адамара $R = +\infty$.

Теперь напомним, что рядом Тейлора функции действительной переменной $y = e^x$ является следующий ряд

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{1.5.2}$$

Сравнивая коэффициенты рядов (1.5.1) и (1.5.2), убеждаемся, что функция $w = e^z$ является единственным аналитическим продолжением функции $y = e^x$ с действительной оси на всю комплексную плоскость.

Рассмотрим теперь функции $w = \cos z$ и $w = \sin z$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.5.1. Показать, что рядами Тейлора функций $w = \cos z$ и $w = \sin z$ являются ряды

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{1.5.3}$$

причем их радиусы сходимости равны $+\infty$.

Из (1.5.3) сразу следует, что функции $w = \cos z$ и $w = \sin z$ являются единственными аналитическими продолжениями функций $y = \cos x$ и $y = \sin x$ с действительной оси на всю комплексную плоскость.

Далее, заменяя в ряде (1.5.1) z на iz и группируя его члены подходящим образом, получим

$$e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Отсюда и из (1.5.3) сразу следует формула Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

а из нее, в свою очередь, формулы

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

которые послужили нам в качестве определения функций $w = \cos z$ и $w = \sin z$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.5.2. Показать, что

$$\operatorname{Re} e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!},$$

$$\operatorname{Im} e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

где $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$.

Заметим, что из упражнения 1.5.2 вытекает формула

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y),$$

которая послужила нам как определение функции $w = e^z$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.5.3. Найти аналитические продолжения функций $y = \operatorname{ch} x$ $y = \operatorname{sh} x$ с действительной оси на всю комплексную плоскость.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5.1. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \tag{1.5.4}$$

является аналитической в круге $\{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ функцией, и его сумма равна функции

$$f(z) = \frac{1}{1-z}. \tag{1.5.5}$$

Во внешности круга $\{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ ряд (1.5.4), очевидно, расходится. Тем не менее, функция (1.5.5) является аналитическим продолжением ряда (1.5.4) на всю комплексную плоскость с выколотой точкой $z = 1$.

Другими словами, аналитическое продолжение некоторой функции может быть осуществлено не обязательно посредством ряда Тейлора. К изучению такой возможности мы и переходим.

2. РЯДЫ ЛОРАНА И ВЫЧЕТЫ

– В жизни своей не видала подобных чудес! С чего это он так ошалел?
– Право же, не знаю, тетя Полли. Кошки всегда кувыркаются, когда у них какая-нибудь радость.

Марк Твен. Приключения Тома Сойера

2.1. Ряды Лорана[7]

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z-z_0)^k, \tag{2.1.1}$$

где $a_k \in \mathbf{C}, k = -1, -2, ...,\quad z_0 \neq \infty$. Каждый член этого ряда имеет смысл, если $z \in \mathbf{C} \setminus \{z_0\}$. В результате замены $\xi^{-1} = z - z_0$ ряд (2.1.1) превратится в степенной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \xi^k. \tag{2.1.2}$$

Положив $\xi = 0$ при $z = \infty$, убедимся в том, что если $\{\xi \in \mathbf{C} : |\xi| < r_1\}$ – круг сходимости ряда (2.1.2), то ряд (2.1.1) абсолютно сходится в каждой точке вне замкнутого круга $\{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| \leq r = r_1^{-1}\}$. В силу признака Вейерштрасса ряд (2.1.1) сходится равномерно при $|z - z_0| > r$, поэтому он определяет голоморфную функцию

$$S_1(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z-z_0)^k.$$

[7] Пьер Альфоне Лоран (1813 - 1854) – французский математик. Исследования в области теории функций, вариационного исчисления и математической физики.

Если степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$$

сходится в круге $\{z \in \mathbf{C} : |z-z_0| < R\}$ (обозначим его сумму через $S_2(z)$), а степенной ряд (2.1.1) сходится при $|z-z_0| > r$, то в кольце $\{z \in \mathbf{C} : r < |z-z_0| < R\}$ функция $S(z) = S_1(z) + S_2(z)$ голоморфна и представляет сумму ряда

$$S(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k.$$

Сформулируем и докажем обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1.1(ТЕОРЕМА ЛОРАНА). *Голоморфная в кольце* $\{z \in \mathbf{C} : r < |z-z_0| < R\}$ *функция* f *в каждой точке этого кольца представляется в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k, \tag{2.1.3}$$

где

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}} d\xi, \tag{2.1.4}$$

а γ *– окружность* $\{\xi \in \mathbf{C} : |\xi - z_0| < \rho\}, r < \rho < R$. ◁ Возьмем точку z из кольца и рассмотрим другое кольцо $\{z \in \mathbf{C} : r_1 < |z-z_0| < R_1\}$, содержащее эту точку и такое, что $r < r_1 < R_1 < R\}$.

По интегральной формуле Коши имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_0|=R_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)} d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_0|=r_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_0|=R_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)} \cdot \frac{d\xi}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}} - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_0|=r_1} \frac{f(\xi)}{(z-z_0)} \cdot \frac{d\xi}{1-\frac{\xi-z_0}{z-z_0}}, \tag{2.1.5}$$

Рассуждая, как при доказательстве теоремы Тейлора, нетрудно показать, что ряды

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{z-z_0}{\xi-z_0}^k \text{ и } \sum_{0}^{\infty} \frac{\xi-z_0}{z-z_0}^k \tag{2.1.6}$$

сходятся равномерно относительно ξ при $|\xi-z_0| = R_1$ и $|\xi-z_0| = r_1$ соответственно, причем их суммы равны

$$\left(1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^{-1} \text{ и } \left(1-\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)^{-1}.$$

Заменяя в (2.1.5) суммы рядов рядами (2.1.6) и пользуясь равномерной сходимостью рядов (2.1.6), получим (2.1.3), где

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_0|=R_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}} d\xi, k = 0, 1, \ldots,$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_0|=r_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}} d\xi, k = -1, -2, \ldots.$$

Поскольку подынтегральные функции во всех интегралах $a_k, k \in \mathbf{Z}$ голоморфны в кольце $\{z \in \mathbf{C} : r < |z - z_0| < R\}$, то в силу интегральной теоремы Коши получаем (2.1.4).▷

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.1. Ряд (2.1.3), коэффициенты $a_k, k \in \mathbf{Z}$ которого находятся по формулам (2.1.4), называется *рядом Лорана* функции f, а ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \text{и} \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - z_0)^{-k}$$

– соответственно *правильной*(*регулярной*) и *главной* (*иррегулярной*) частями ряда Лорана.

ТЕОРЕМА 2.1.2. *Голоморфная в кольце* $\{z \in \mathbf{C} : r < |z - z_0| < R\}$ *функция* f *единственным образом может быть представлена в виде ряда (2.1.4).*

◁ Предположим, что в данном кольце функция f может быть представлена в виде двух рядов вида (2.1.4)

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{-\infty}^{\infty} b_k (z - z_0)^k. \tag{2.1.7}$$

Фиксируем некоторое целое число n, умножим оба ряда на $(z - z_0)^{-n-1}$ и проинтегрируем по окружности $\{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| = \rho\}, r < \rho < R$. Поскольку оба ряда сходятся равномерно, то мы можем вынести знак суммы за знак интеграла. Интегрируя каждый член рядов (2.1.7), заметим, что

$$\int_{|z-z_0|=\rho} (z - z_0)^{k-n-1} dz = \int_{|\xi|=\rho} \xi^{k-n-1} d\xi =$$

$$\left| \begin{array}{l} \xi = \rho e^{i\varphi} \\ d\xi = i\rho e^{i\varphi} \end{array} \right| = i\rho k - n \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\varphi} d\varphi =$$

$$= i\rho^{k-n} \int_0^{2\pi} \cos(k-n)\varphi d\varphi - \rho^{k-n} \int_0^{2\pi} \sin(k-n)\varphi d\varphi = \begin{cases} 0, k \neq n; \\ 2\pi i, k = n. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что $a_n = b_n \forall n \in \mathbf{Z}$.▷

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.1. При определении ряда Лорана (2.1.3) *не исключается* случай, когда $r = 0$ или $R = +\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.2. Из определения 2.1.1 непосредственно следует, что ряды Тейлора являются частным случаем рядов Лорана. Другим частным случаем являются ряды Фурье [8]. Действительно, пусть функция f голоморфна в кольце $\{z \in \mathbf{C} : 1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon\}$. Тогда в этом кольце она может быть представлена своим рядом Лорана

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_k z^k,$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=1} f(\xi)\xi^{-k-1} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\tau}) e^{-ik\tau} d\tau.$$

В частности, для точек $z = e^{it}$ единичной окружности получим

$$\varphi(t) = f(e^{it}) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}. \tag{2.1.8}$$

Ряд (2.1.8) представляет собой ряд Фурье функции φ, записанный в комплексной форме. В самом деле,

$$\varphi(t) = c_0 + \sum_1^{\infty} (c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt}) =$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

где $c_0 = a_0/2, a_k = c_k - c_{-k}, b_k = i(c_k - c_{-k})$.

2.2. Нули и изолированные особые точки аналитической функции

Точка z_0 из области определения функции f, в которой $f(z_0) = 0$, называется *нулем* функции f.

[8] Жак Батист Жозеф Фурье (1768 - 1830) – французский математик, один из основоположников математической физики.

В области аналитичности Ω функции f число ее нулей, находящихся от границы $\partial\Omega$ на расстоянии, не меньшем n^{-1}, для каждого натурального n в силу теоремы о единственности аналитической функции конечно. Следовательно, аналитическая функция f в области своего задания может иметь лишь счетное число нулей. (Разумеется, мы считаем, что $f(z) \not\equiv 0$.)

В области аналитичности в окрестности своего нуля z_0 функция f разлагается в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, a_m \neq 0, \tag{2.2.1}$$

где $m \geq 1$. Число m называется *кратностью* нуля. Из (2.2.1) непосредственно следует, что точка z_0 является нулем кратности m для аналитической функции f точно тогда, когда $f^{(k)}(z_0) = 0, k = 0, 1, ..., m-1$, а $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. При $m = 1$ нуль z_0 называется *простым.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.1. Пусть в окрестности $\mathcal{O}_{z_0}^{\delta}$ точки $z_0 \in \mathbf{C}$ функция f аналитична всюду, кроме самой точки z_0, в которой она может быть и не задана. Тогда точка z_0 называется *изолированной особой точкой* аналитической функции f.

Согласно теореме Лорана, функция f в кольце $\{z \in \mathbf{C} : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ разлагается в ряд

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Если множество отличных от нуля коэффициентов при отрицательных степенях $z - z_0$ пусто, конечно или бесконечно, то точка z_0 называется соответственно *устранимой особой точкой, полюсом* или *существенно особой точкой* аналитической функции f.

Для дальнейшего важно располагать информацией о поведении аналитической функции вблизи изолированной особой точки.

ТЕОРЕМА 2.2.1. *Точка z_0 является устранимой особой точкой аналитической функции f точно тогда, когда функция f ограничена в окрестности этой точки.*

$\triangleleft$ Пусть z_0 – устранимая особая точка аналитической функции f. Тогда в некоторой ее окрестности $\mathcal{O}_{z_0}^{\delta}$ имеем

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Отсюда

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k = a_0.$$

Поэтому ограниченность функции f имеет место в силу свойства предела.

Теперь пусть существует

$$M = \sup_{z \in \mathcal{O}_{z_0}^{\delta} \setminus \{z_0\}} |f(z)|.$$

Тогда

$$|a_k| = \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{k+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{M}{\rho^{k+1}} |dz| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{\rho^k},$$

где $\rho \in (0, \delta)$. Поэтому коэффициенты при отрицательных степенях $z - z_0$ удовлетворяют неравенствам

$$|a_{-k}| \leq \frac{M\rho^k}{2\pi}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Устремляя $\rho \to 0$, получим $a_{-k} = 0, k = 1, 2, \ldots$.$\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.1. Из доказательства теоремы 2.2.1 следует, что (z_0 – устранимая особая точка функции f) $\Leftrightarrow$ (существует конечный предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$).

Пусть теперь z_0 - полюс аналитической функции f. Обозначив через m наибольшее натуральное число среди индексов k отличных от нуля коэффициентов a_{-k} при отрицательных степенях $z - z_0$, получим

$$f(z) = \sum_{k=1}^{m} a_{-k} (z - z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Число m называется *порядком* полюса z_0. При $m = 1$ полюс z_0 называется *простым.*

ТЕОРЕМА 2.2.2. *Точка z_0 является полюсом порядка m аналитической функции f точно тогда, когда эта точка является нулем кратности m аналитической в точке z_0 функции, равной $1/f$ при $z \neq z_0$.*

$\triangleleft$ Пусть z_0 - полюс функции f порядка m. Рассмотрим функцию

$$F(z) = (z - z_0)^m f = \sum_{k=1}^{m} a_{-k}(z - z_0)^{m-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^{m+k},$$

для которой z_0 - устранимая особая точка. Поэтому

$$\lim_{z\to z_0} F(z) = a_{-m} \neq 0.$$

Отсюда в силу свойств предела при любом $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon < |a_{-m}|$ найдется окрестность $\mathcal{O}^\delta_{z_0}$ такая, что $|F(z)| > \varepsilon$ при всех $z \in \mathcal{O}^\delta_{z_0} \setminus \{z_0\}$. Следовательно,

$$|f(z)| > \frac{\varepsilon}{|z - z_0|^m} \quad \forall z \in \mathcal{O}^\delta_{z_0} \setminus \{z_0\}.$$

Значит,

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(z) = 1/f(z)$, где $z \in \mathcal{O}^\delta_{z_0} \setminus \{z_0\}$. Очевидно, функция φ - аналитична, причем $|\varphi^{(k)}(z)| \le \varepsilon^{-1}|z-z_0|^{m-k}$, $k = 0, 1, ..., m - 1$. Отсюда

$$\lim_{z\to z_0} \varphi^{(k)}(z) = 0 \quad k = 0, 1, ..., m - 1.$$

Теперь пусть z_0 - нуль кратности m аналитической функции φ такой, что $\varphi(z) = 1/f(z), z \in \mathcal{O}^\delta_{z_0} \setminus \{z_0\}$. Тогда $\varphi(z) = (z - z_0)^m\psi(z)$, причем $\psi(z_0) \neq 0$ и функция ψ аналитична в $\mathcal{O}^\delta_{z_0}$. Отсюда

$$\frac{1}{\psi(z)} = (z - z_0)^m f(z).$$

Поскольку $\psi(z_0) \neq 0$ и функция ψ аналитична в окрестности $\mathcal{O}^\delta_{z_0}$, то

$$\frac{1}{\psi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_0)^k,\ z \in \mathcal{O}^\delta_{z_0}.$$

Поэтому

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_0)^{k-m},$$

то есть z_0 - полюс порядка m аналитической функции f.$\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.2. Из доказательства теоремы 2.2.2 непосредственно следует, что (z_0 - полюс функции f) $\Leftrightarrow$ ($\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$).

ТЕОРЕМА 2.2.3 (Сохоцкого[9]-Вейерштрасса). *Пусть z_0 - существенно особая точка аналитической функции f. Тогда для любого комплексного числа $A \in \overline{\mathbf{C}}$ найдется такая последовательность $\{z_k\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z_0$, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k) = A$.*

$\triangleleft$ Пусть сначала $A = \infty$. По определению в окрестности существенно особой точки z_0 функция f имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k,$$

причем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k}$$

сходится во всех точках плоскости $\mathbf{C}$, кроме точки z_0. Следовательно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}\xi^k$$

будет сходиться во всех точках $\xi = (z - z_0)^{-1} \in \mathbf{C}$. По теореме Лиувилля целая функция

$$\varphi(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}\xi^k$$

[9]Юлиан Васильевич Сохоцкий (1842 - 1927) - русский математик. Основные исследования посвящены теории функций комплексной переменной, алгебре и теории чисел.

не может быть ограничена на плоскости $\mathbf{C}_\xi$. Значит, существует последовательность $\{\xi_k\}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\xi_k=\infty$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(\xi_k)=\infty$.

Рассмотрим последовательность

$$\left\{z_k=\frac{1}{\xi_k}+z_0\right\}.$$

Очевидно,

$$\lim_{k\to\infty} z_k=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\xi_k}+z_0\right)=z_0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z_k-z_0)^{-n}=\lim_{k\to\infty}\varphi(\xi_k)=\infty,$$

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z_k-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\lim_{k\to\infty}\xi_k^{-n}=a_0.$$

Отсюда

$$\lim_{k\to\infty}f(z_k)=\infty.$$

Теперь пусть $A\neq\infty$. Докажем от противного, то есть предположим, что не существует последовательности $\{z_k\}$, $\lim\limits_{k\to\infty}z_k=z_0$ такой, что $\lim\limits_{k\to\infty}f(z_k)=A$. Тогда в некоторой окрестности $\mathcal{O}_{z_0}^{\delta}$ точки z_0 имеем $|f(z)-A|>\alpha>0$. Функция $\varphi(z)=(f(z)-A)^{-1}$ аналитична в этой окрестности и ограничена:

$$|\varphi(z)|<1/\alpha.$$

Из теоремы 2.2.1 следует, что z_0 - устранимая особая точка функции φ. Поэтому существует конечный предел функции φ при $z\to z_0$, который ввиду неограниченности функции f может быть только нулем:

$$\lim_{z\to z_0}\varphi(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)-A}=0.$$

Отсюда в силу теоремы 2.2.1 функция $f(z)-A$ имеет в точке z_0 полюс. Поэтому z_0 - полюс и для функции f. Противоречие.$\triangleright$

Пусть, наконец, изолированной особой точкой функции f является бесконечно удаленная точка, то есть при любом $\varepsilon>0$

функция f аналитична в области $\{z\in\mathbf{C}:|z|>\varepsilon\}$. Очевидно, что функция $\varphi(\xi)=f(1/\xi)$ аналитична в круге $\{\xi\in\mathbf{C}:|\xi|=\frac{1}{|f|}<\frac{1}{\varepsilon}\}$ кроме, быть может, точки $\xi=0$. Поэтому лорановское разложение функции φ вблизи точки $\xi=0$ имеет вид

$$\varphi(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{-k}\xi^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k\xi^k. \tag{2.2.2}$$

В зависимости от того, является ли $\xi=0$ устранимой особой точкой, полюсом порядка m или существенно особой точкой для функции φ, говорят, что $z=\infty$ есть *устранимая особая точка, полюс порядка m* или *существенно особая точка* для функции f. Другими словами, в зависимости от того, множество отличных от нуля коэффициентов при положительных степенях z в разложении (2.2.2) пусто, конечно или бесконечно, $z=\infty$ является устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой функции f.

2.3. Целые и мероморфные функции

Напомним, что однозначная и аналитическая во всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$ функция f называется целой.

Целая функция не имеет конечных особых точек. Следовательно, она может иметь изолированную особую точку только в бесконечности. Поскольку целая функция изображается всюду сходящимся степенным рядом

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k,$$

то в случае, когда точка ∞ есть устранимая особая точка функции f, коэффициенты $a_k=0, k=1,2,...$, и $f(z)\equiv a_0$. (Этот же результат непосредственно следует из теоремы Лиувилля.) Если же точка ∞ – полюс порядка m, то

$$a_m\neq0, a_{m+k}=0, k\in\mathbf{N},$$

и поэтому

$$f(z)=a_0+a_1z+...+a_mz^m-$$

многочлен (*целая рациональная функция*). И наконец, если ∞ – существенно особая точка, то среди коэффициентов a_k должно быть бесконечное число отличных от нуля чисел. В этом случае функция f называется *целой трансцендентной функцией.* Примерами целых трансцендентных функций служат функции $w = e^z, w = \cos z, w = \sin z$ и т.д.

Приведем два результата, касающихся целых функций.

ТЕОРЕМА 2.3.1 (ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ). *Всякий многочлен*

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n, a_n \neq 0, n \in \mathbf{N}$$

имеет по крайней мере один нуль в комплексной плоскости.

$\triangleleft$ Докажем от противного. Пусть не существует точки $z_0 \in \mathbf{C}$ такой, что $p_n(z_0) = 0$. Тогда функция

$$f(z) = \frac{1}{P_n(z)}$$

является целой функцией, причем

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{P_n(z)} = 0.$$

Значит, точка ∞ – устранимая особая точка. Отсюда следует, что $f(z) \equiv const$, что противоречит определению этой функции.$\triangleright$

ТЕОРЕМА 2.3.2. *Пусть f – аналитическая во всей комплексной плоскости функция за исключением быть может одной точки. Пусть функция F совпадает с функцией f во всех точках области определения последней и биективно отображает $\overline{\mathbf{C}}$ на себя. Тогда F – дробно-линейная функция.*

$\triangleleft$ Пусть вначале $F(\infty) = \infty$. Тогда функция f биективно отображает плоскость $\mathbf{C}$ на себя и, следовательно, является целой функцией, причем

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} F(z) = \infty.$$

Значит, функция f – многочлен степени $n \geq 1$.

Покажем, что $n = 1$. Предположим противное, то есть что f – многочлен степени $n \geq 2$. Тогда для всякой точки $z_0 \in \mathbf{C}$, в

которой $f'(z_0) \neq 0$, уравнение $f(z) - f(z_0) = 0$ имеет по крайней мере два различных корня – z_0 и $z_1 \neq z_0$. Но равенство $f(z_1) = f(z_0)$ противоречит однолистности функции f. Значит, $f(z) = a_0 + a_1 z$.

Теперь пусть $F(\infty) = w_0 \in \mathbf{C}$. Дробно-линейная функция $\xi = (w - w_0)^{-1}$ биективно отображает плоскость $\overline{\mathbf{C}}$ на себя. Построим функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{F(z) - w_0}.$$

Поскольку $F(z) \neq w_0$, если $z \in \mathbf{C}$, то

$$\Phi(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}, z \in \mathbf{C}.$$

Значит, функция Φ аналитична в плоскости $\mathbf{C}$, причем $\Phi(\infty) = \infty$. По доказанному $\Phi(z) = a_0 + a_1 z$. Отсюда

$$F(z) = w_0 + \frac{1}{a_0 + a_1 z}, \ a_1 \neq 0,$$

то есть F – дробно-линейная функция.$\triangleright$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.1. Функция f, которую можно представить в виде частного двух целых функций

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \ h(z) \not\equiv 0, \ z \in \mathbf{C},$$

называется *мероморфной* функцией.

В частности, мероморфными функциями являются все целые функции ($h(z) \equiv 1$) и *рациональные* (частные двух многочленов). Целая функция не имеет в плоскости $\mathbf{C}$ особых точек, а рациональная обладает лишь конечным числом особых точек, причем все они являются полюсами, так как лежат в нулях знаменателя.

Произвольная мероморфная функция в качестве особых точек может иметь только полюсы, расположенные в нулях знаменателя, однако число этих полюсов может быть бесконечным. Однако, в силу теоремы единственности аналитической функции, нули функции h не могут иметь предельной точки, отличной от ∞. Следовательно, если число полюсов мероморфной функции бесконечно, то ∞ служит предельной точкой полюсов. Отсюда вытекает, что если ∞ – изолированная особая точка мероморфной функции, то число ее полюсов конечно.

ТЕОРЕМА 2.3.3. *Мероморфная функция, имеющая конечное число полюсов, является рациональной функцией.*

$\triangleleft$ Пусть $z_1, z_2, ..., z_n$ – конечные полюсы мероморфной функции f. Разложим функцию f в окрестности полюса z_j в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=1}^{m_j} a_{-k}(z - z_j)^{-k} + \varphi(z) = \psi_j(z) + \varphi(z),$$

где φ – правильная, а ψ_j – главная части лорановского разложения.

По построению функция φ аналитична в окрестности точки z_j, а ψ_j – рациональная функция, имеющая полюс в точке z_j порядка m_j, причем

$$\lim_{z\to\infty} \psi_j(z) = 0.$$

Как нетрудно видеть, функция

$$F(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{n} \psi_j(z),$$

где ψ_j $j = 1, 2, ..., n$ – главные части лорановского разложения функции f в окрестности точек z_j $j = 1, 2, ..., n$, имеет в полюсах $z_1, z_2, ..., z_n$ устранимые особые точки. Следовательно, функцию F можно единственным образом распространить на всю комплексную плоскость. Обозначим получившуюся функцию тем же символом F.

Итак, по построению F – целая функция, причем по условию теоремы ∞ – либо устранимая особая точка, либо полюс. В первом случае F – константа, а во втором – многочлен. В обоих случаях функция

$$f(z) = F(z) + \sum_{j=1}^{n} \psi_j(z)$$

является рациональной.$\triangleright$

СЛЕДСТВИЕ 2.3.1. *Любая рациональная функция разлагается на простейшие дроби.*

УПРАЖНЕНИЕ 2.3.1. Доказать следствие 2.3.1.

2.4. Вычеты в конечных точках

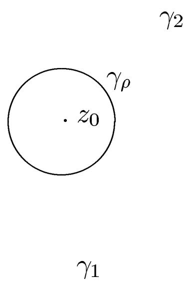
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4.1. Пусть $z_0 \in \mathbf{C}$ – изолированная особая точка аналитической функции f, а γ контур, ограничивающий область, содержащую точку z_0. Пусть f аналитична на γ и во всех точках внутри γ, кроме точки z_0. Тогда интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$$

называется *вычетом функции f относительно точки z_0.*

Здесь Res – начальные буквы французского слова residu – остаток.

Покажем корректность определения вычета. Во-первых, если z_0 – изолированная особая точка аналитической функции f, то подходящий контур всегда найдется. Действительно, функция f аналитична в кольце $\{z \in \mathbf{C} : 0 < |z - z_0| < \delta\}$, поэтому окружность $\{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| = \rho\}$, где $\rho \in (0, \delta)$, ориентированная против часовой стрелки, будет как раз подходящим контуром. Во-вторых, вычет функции f относительно точки z_0 не зависит от контура γ. В самом деле, пусть γ_1 и γ_2 – два контура, удовлетворяющих условиям определения. Пусть положительное число ρ так мало, что окружность $\{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| = \rho\}$ содержится как внутри γ_1, так и внутри γ_2. Тогда по интегральной теореме Коши имеем



$$\int_{\gamma_\rho} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

и

$$\int_{\gamma_\rho} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz,$$

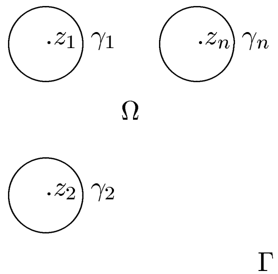
где $\gamma_\rho = \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| = \rho\}$.

Корректность определения вычета установлена.

ТЕОРЕМА 2.4.1.*Пусть функция f аналитична в области Ω кроме конечного числа точек $z_1, z_2, ..., z_n$ и аналитична на границе $\partial\Omega$, являющейся контуром Γ. Тогда*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

$\triangleleft$ Заметим прежде всего, что все $z_k, k = 1, 2, ..., n$ – изолированные особые точки, так как каждую точку можно заключить в круг,



не содержащий других точек, причем этот круг содержится в Ω. Поэтому вычет функции f относительно каждой точки z_k, $k = 1, 2, ..., n$, определен. Опишем вокруг каждой точки z_k окружность $\gamma_k = \{z \in \mathbf{C} : |z - z_k| = \rho\}$ столь малого радиуса ρ, что каждая окружность лежит в Ω и во внешности остальных окружностей, $k = 1, 2, ..., n$.

Тогда функция f будет аналитична в области Ω, полученной из Ω удалением всех кругов $\{z \in \mathbf{C} : |z - z_k| < \rho\}, k = 1, 2, ..., n$, а

также на границе $\partial\Omega$. В силу интегральной теоремы Коши имеем

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \triangleright$$

Теперь приведем рецепты для вычисления вычетов.

ТЕОРЕМА 2.4.2. *Пусть $z_0 \in \mathbf{C}$ – изолированная особая точка аналитической функции f. Тогда*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1},$$

где a_{-1} – коэффициент при $(z - z_0)^{-1}$ лорановского разложения функции f в окрестности точки z_0.

$\triangleleft$ В кольце $\{z \in \mathbf{C} : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ функция f разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

коэффициент a_{-1} которого находится по формуле

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(z)dz = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z). \triangleright$$

ТЕОРЕМА 2.4.3. *Пусть z_0 – полюс порядка m аналитической функции f. Тогда*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (f(z)(z - z_0)^m).$$

$\triangleleft$ Разложим функцию f в ряд Лорана в окрестности точки z_0:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + ... + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Умножив это разложение на $(z - z_0)^m$, получим

$$f(z)(z - z_0)^m = a_{-m} + ... + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k+m}.$$

Положим $F(z) = f(z)(z - z_0)^m, F(z_0) = a_{-m}$. Функция F аналитична в окрестности точки z_0, поэтому в силу теоремы Тейлора имеем

$$a_{-1} = \frac{F^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \frac{\lim\limits_{z\to z_0} F^{(m-1)}(z)}{(m-1)!}.$$

Поскольку $F(z)$ совпадает с $f(z)(z - z_0)^m$ при $z \neq z_0$, то

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} (f(z)(z - z_0)^m)^{(m-1)}.\triangleright$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4.1. Если точка z_0 – простой полюс функции f, то из теоремы 2.4.3 вытекает, что

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} f(z)(z - z_0). \tag{2.4.1}$$

СЛЕДСТВИЕ 2.4.1. *Пусть в окрестности точки z_0 функция*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$

причем функции g и h аналитичны в этой окрестности, а z_0 – простой нуль функции h. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

$\triangleleft$ Заметим, что поскольку z_0 – простой нуль функции h, то $h'(z_0) \neq 0$. Поэтому z_0 – простой полюс функции f. В силу (2.4.1) имеем

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} f(z)(z - z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)},$$

причем последнее равенство справедливо в силу аналитичности функций g и h.$\triangleright$

2.5. Вычет в бесконечно удаленной точке

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5.1. Пусть γ – контур, а функция f аналитична на контуре γ и во внешности γ не имеет конечных особых точек. *Вычетом функции f в бесконечно удаленной точке* называется интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-} f(z)dz = \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z).$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.5.1. Убедиться в корректности определения 2.5.1.

УПРАЖНЕНИЕ 2.5.2. Доказать, что

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1},$$

где a_{-1} – коэффициент при z^{-1} лорановского разложения функции f в окрестности бесконечно удаленной точки.

УПРАЖНЕНИЕ 2.5.3. Пусть функция f имеет в точке ∞ полюс порядка m. Доказать, что

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \lim_{z\to\infty} (z^{m+2} \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}} f(z)).$$

ТЕОРЕМА 2.5.1. *Сумма всех вычетов аналитической функции, имеющей в расширенной комплексной плоскости одни только изолированные особые точки, равна нулю.*

$\triangleleft$ Прежде всего отметим, что число особых точек конечно, ибо в противном случае существовала бы конечная или бесконечно удаленная предельная точка множества особых точек, которая являлась бы тем самым неизолированной особой точкой. Далее, построим такую окружность $\gamma_\rho = \{z \in \mathbf{C} : |z| = \rho\}$, чтобы ни на ней, ни в ее внешности не лежало бы особых точек, за исключением, быть может, точки ∞. Тогда все конечные особые точки $z_1, z_2, ..., z_n$ будут лежать внутри этой окружности и по теореме 2.4.1 имеем

$$\int_{\gamma_\rho} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

По определению 2.5.1 имеем

$$\int_{\gamma_\rho} f(z)dz = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z).$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0. \triangleright$$

Из этой теоремы следует ряд забавных выводов. Во-первых, вычет в точке ∞ целой функции обязан быть равным нулю, несмотря на тип особенности. Во-вторых, если ∞ - устранимая особая точка функции f, то вычет функции f в точке ∞ может отличаться от нуля. Действительно, рассмотрим разложение функции f в некоторой окрестности точки ∞ при условии, что ∞ - устранимая особая точка

$$f(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + ..., \ |z| > R.$$

Отсюда в силу теоремы 2.5.1 имеем

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1}.$$

2.6. Логарифмический вычет

Найдем сначала значение интеграла $\int_\Gamma \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz$, где Γ – кусочно-гладкая кривая, ограничивающая область Ω, функции $\varphi(z)$ и $f(z)$ аналитичны на $\Omega \cup \Gamma$, причем $f(z) \neq 0, \ z \in \Gamma$.

Функция $f(z)$ может иметь лишь конечное число нулей в области Ω. В противном случае существовала бы предельная точка z_0 этих нулей в $\Omega \cup \Gamma$. Очевидно, $f(z_0) = 0$, поэтому $z_0 \notin \Gamma$, а $z_0 \in \Omega$. В силу теоремы единственности функция $f(z) \equiv 0$, что противоречит условию $f(z) \neq 0 \ z \in \Gamma$.

Итак, число нулей функции $f(z)$ в области Ω конечно, и, следовательно, функция $F(z) = \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$ – аналитическая на Γ – может иметь в области Ω лишь конечное число особых точек (именно, в нулях функции $f(z)$). Поэтому интеграл $\int_\Gamma F(z)dz$

можно вычислить, используя теорему о вычетах. С этой целью вычислим вычеты функции $F(z)$ в нулях функции $f(z)$.

ЛЕММА 2.6.1.*Пусть точка $z_0 \in \Omega$ – нуль кратности m функции $f(z)$. Тогда z_0 – простой полюс или устранимая особая точка функции $F(z)$, причем*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} F(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_0} \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = m\varphi(z_0).$$

$\triangleleft$ Функция $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z) = (z - z_0)^m f_1(z),$$

где функция $f_1(z)$ аналитична в точке z_0 и $f_1(z_0) \neq 0$. Тогда

$$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} f_1(z) + (z - z_0)^m f_1'(z),$$

откуда

$$F(z) = \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - z_0}\left(\frac{mf_1(z) + (z - z_0)f_1'(z)}{f_1(z)}\varphi(z)\right) =$$

$$\frac{\psi(z)}{z - z_0},$$

где функция $\psi(z)$ аналитична в точке z_0, причем $\psi(z_0) = m\varphi(z_0)$. Следовательно, z_0 – простой полюс функции $F(z)$, если $\varphi(z_0) \neq 0$, и устранимая особая точка, если $\varphi(z_0) = 0$. Поэтому

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} F(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{\psi(z)}{z - z_0} = \psi(z_0) = m\varphi(z_0). \triangleright$$

Пусть теперь $z_1, z_2, ..., z_n$ – различные нули функции $f(z)$ в области Ω и $m_1, m_2, ..., m_n$ – соответствующие кратности этих нулей. Согласно лемме $\operatorname*{Res}_{z=z_k} \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = m_k\varphi(z_k)$. Поэтому

$$\int_\Gamma \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i \sum_{1}^{n} m_k\varphi(z_k). \qquad (2.6.1)$$

Если, в частности, $\varphi(z) \equiv 1$, то из формулы (2.6.1) получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_1^n m_k. \qquad (2.6.2)$$

Обозначим $\sum_1^n m_k = N$. Очевидно, N – число нулей функции $f(z)$ в области Ω, если каждый нуль считать столько раз, какова его кратность. Интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ называется *логарифмическим вычетом функции $f(z)$ относительно контура* Γ.

ТЕОРЕМА 2.6.1. *Число нулей аналитической функции внутри контура Γ (с учетом их кратности) равно логарифмическому вычету функции относительно этого контура.*

Пусть теперь вдобавок к сказанному функция $f(z)$ имеет в области Ω конечное число полюсов $z_1', z_2', ..., z_\nu'$ кратности $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_\nu$ соответственно. Найдем сначала вычет функции $F(z) = \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$ в одном из полюсов.

ЛЕММА 2.6.2.*Пусть точка $z_0' \in \Omega$ – полюс кратности μ функции $f(z)$. Тогда z_0 – простой полюс или устранимая особая точка функции $F(z)$, причем*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0'} F(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_0'} \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = -\mu\varphi(z_0').$$

◁ Аналогично доказательству леммы 2.6.1 в окрестности точки z_0' представим функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{(z - z_0')^\mu},$$

где $f_1(z)$ аналитична в точке z_0'. Поэтому

$$F(z) = \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - z_0'}\left(\frac{-\mu f_1(z) + (z - z_0')f_1'(z)}{f_1(z)}\varphi(z)\right) = \frac{\psi(z)}{z - z_0'}.$$

Проводя рассуждения, аналогично доказательству леммы 2.6.1, получим требуемое.▷

Возвращаясь к общей ситуации и повторяя рассуждения выше, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_1^n m_k\varphi(z_k) - \sum_1^\nu \mu_k\varphi(z_k'). \qquad (2.6.3)$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.6.1. Сформулировать аналог теоремы 2.6.1 для функции $f(z)$, имеющей в области Ω конечное число полюсов и аналитической на $\partial\Omega$.

2.7. Принцип аргумента и его следствия

Логарифмический вычет для аналитической функции $w = f(z)$ можно вычислить иначе. Некоторую точку $z_0 \in \Gamma$ будем считать началом и концом Γ. При движении точки z из z_0 вдоль Γ в положительном направлении точка $w = f(z)$ будет двигаться из $w_0 = f(z_0)$ вдоль кривой $\Gamma' : w = f(z),\ z \in \Gamma$. Когда точка z обойдет кривую Γ, точка w опишет замкнутую кривую Γ'. Перепишем логарифмический вычет в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w}.$$

Фиксируем в точке w_0 значение $\arg w_0 = \varphi'$. При движении точки w по кривой Γ' $\arg w$ непрерывно изменяется и при возвращении в точку w_0 примет значение $\varphi'' = \varphi' + 2\pi\nu$, где ν – число оборотов радиус-вектора точки w вокруг точки O. Имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi}(\varphi'' - \varphi') = \nu.$$

Величина $\varphi'' - \varphi'$ является приращением $\arg f(z)$ при обходе точкой z контура Γ.

ТЕОРЕМА 2.7.1.*Если функция $f(z)$ аналитична на контуре Γ и внутри него, причем $f(z) \neq 0,\ z \in \Gamma$, то число нулей функции $f(z)$ внутри Γ равно деленному на 2π приращению $\arg f(z)$ при обходе точкой z контура Γ против часовой стрелки.*

Эта теорема называется *принципом аргумента.*

СЛЕДСТВИЕ 2.7.1 (ТЕОРЕМА РУШЕ).*Пусть функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ аналитичны в $\overline{\Omega}$, где $\partial\Omega$ – контур, причем $\forall z \in \partial\Omega\ |f_1(z)| > |f_2(z)|$. Тогда в области Ω их сумма $f_1(z)+f_2(z)$ имеет столько же нулей, сколько функция $f_1(z)$.*

$\triangleleft$ Поскольку $|f_1(z) + f_2(z)| \geq |f_1(z) - f_2(z)| > 0\ \forall z \in \partial\Omega$ и $|f_1(z)| > |f_2(z)| \geq 0\ \forall z \in \partial\Omega$, то $f_1(z) + f_2(z)$ и $f_1(z)$ не имеют нулей на $\partial\Omega$. Пусть $z \in \partial\Omega$, тогда

$$f_1(z) + f_2(z) = f_1(z)\left(1 + \frac{f_2(z)}{f_1(z)}\right).$$

Отсюда

$$\arg(f_1(z) + f_2(z)) = \arg(f_1(z)) + \arg\left(1 + \frac{f_2(z)}{f_1(z)}\right)$$

и, следовательно,

$$\operatorname*{Var}_{\partial\Omega} \arg(f_1(z) + f_2(z)) = \operatorname*{Var}_{\partial\Omega} \arg(f_1(z)) + \operatorname*{Var}_{\partial\Omega} \arg\left(1 + \frac{f_2(z)}{f_1(z)}\right).$$

Но $\left|\frac{f_2(z)}{f_1(z)}\right| < 1\ \forall z \in \partial\Omega$, поэтому все точки кривой $w = \frac{f_2(z)}{f_1(z)},\ z \in \partial\Omega$ удовлетворяют неравенству $|w-1| < 1$, т.е. лежат внутри круга с центром в точке $w = 1$ и радиусом 1. Следовательно,

$$\operatorname*{Var}_{\partial\Omega} \arg\left(1 + \frac{f_2(z)}{f_1(z)}\right) = 0.\triangleleft$$

СЛЕДСТВИЕ 2.7.2 (ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ). *Многочлен $P_n(z) = a_0 z^n + a_1^{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_n,\ a_0 \neq 0,\ n \geq 1$ имеет в* **C** *n нулей (учитывая их кратности).*

$\triangleleft$ При $|z| \geq 1$ имеем

$$|a_1^{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_n| \leq |a_1|^{n-1}|z|^{n-1} + \ldots + |a_n| \leq |z^{n-1}|(|a_1| + \ldots + |a_n|).$$

Положим $\sum_{k=1}^{n} |a_k| = M$. Тогда

$$|z^{n-1}|M < |a_0||z|^n, \quad |z| > \frac{M}{|a_0|}.$$

Следовательно, при $|z| > R_0 = \max\{1, M\}$ справедливо неравенство

$$|a_0 z^n| > |a_1^{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_n|,$$

т.е. вне круга радиуса R_0 многочлен $P_n(z)$ нулей не имеет. Возьмем $R > R_0$ и положим $f_1(z) = a_0 z^n$, а $f_2(z) = a_1^{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_n$. Функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ удовлетворяют условиям теоремы Руше на окружности $|z| = R$. Следовательно, в круге $|z| < R$ функция $P_n(z) = f_1(z) + f_2(z)$ имеет ровно n нулей.$\triangleright$

3. ИНТЕГРАЛЫ С ПАРАМЕТРОМ

Сразу видно, что это самозванец, - набрал где-то ничего не значащих имен и фактов и явился с ними сюда; а вы все приняли это за доказательства ....

Марк Твен. Приключения Гекльберри Финна

Интеграл, зависящий от параметра, - это функция вида

$$\Phi(t) = \int\limits_{\Omega_t} f(x,t)dx, \tag{3.0.1}$$

где t играет роль параметра, пробегающего некоторое множество T, а каждому значению $t \in T$ отвечает множество Ω_t и интегрируемая на нем в собственном или несобственном смысле функция $\Phi_t(x) = f(x,t)$.

Если при каждом $t \in T$ интеграл (3.0.1) является собственным, то принято говорить, что функция Φ в (3.0.1) есть *собственный интеграл с параметром.* Если же при некоторых (возможно, при всех) $t \in T$ интеграл (3.0.1) существует в несобственном смысле, то говорят, что функция Φ в (3.0.1) есть *несобственный интеграл с параметром.*

Природа множества параметров T и множеств $\Omega_t, t \in T$ может быть чрезвычайно разнообразной. Однако мы сосредоточим свое внимание на одномерном случае, являющемся основой любых обобщений.

3.1. Непрерывность и интегрируемость несобственного интеграла с параметром

Пусть множеством параметров будет отрезок $[\alpha,\beta]$, на котором заданы две непрерывные функции φ и ψ, причем $\varphi(t) \le \psi(t)$,

если $t \in [\alpha,\beta]$. Тогда интеграл (3.0.1) примет вид

$$\Phi(t) = \int\limits_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(x,t)dx. \tag{3.1.1}$$

Рассмотрим область

$$\Omega = \{(x,t) \in \mathbf{R}^2 : \alpha < t < \beta, \varphi(t) < x < \psi(t)\}.$$

В силу критерия измеримости область Ω измерима по Жордану [10] и, очевидно, элементарна относительно оси Ox. Поэтому в силу свойств интеграла Римана справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3.1.1.*Пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$, а функция f непрерывна на Ω. Тогда функция Φ непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$.*

Утверждению этой теоремы можно придать следующий вид:

$$\lim_{t\to s} \int\limits_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(x,t)dx = \int\limits_{\lim\limits_{t\to s}\varphi(t)}^{\lim\limits_{t\to s}\psi(t)} \lim_{t\to s} f(x,t)dx.$$

Перейдем к рассмотрению вопроса об интегрируемости функции Φ. Поскольку область Ω элементарна относительно оси Ox, то в силу теоремы о переходе от кратного интеграла Римана к повторному справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3.1.2.*Пусть выполнены условия теоремы 3.1.1. Тогда функция $\Phi \in \mathcal{R}[\alpha,\beta]$, причем*

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \Phi(t)dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\int\limits_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(x,t)dx = \iint\limits_{\Omega} f(x,t)dxdt.$$

[10] Мари Эдмон Камиль Жордан (1838-1922) - французский математик. Основные направления исследований - математический анализ, алгебра, топология, дифференциальные уравнения.

3.2. Дифференцирование собственного интеграла с параметром

Вначале мы рассмотрим частный случай интеграла (3.1.1), т.е. интеграл

$$\Phi(t) = \int_a^b f(x,t)dx. \tag{3.2.1}$$

ТЕОРЕМА 3.2.1.*Пусть функция f и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial t}$ непрерывны на прямоугольнике*

$$\Pi = \{(x,t) \in \mathbf{R}^2 : a \le x \le b, \alpha \le t \le \beta\}.$$

Тогда функция Φ из (3.2.1) дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$, причем

$$\frac{d\Phi}{dt}(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx.$$

◁ Пусть точки $t, t+\Delta t \in [\alpha,\beta]$, тогда

$$\frac{\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\int_a^b (f(x,t+\Delta t)-f(x,t))dx =$$

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t+\Theta\Delta t)dx,$$

где $0 < \Theta < 1$, в силу формулы конечных приращений Лагранжа [11].

Обозначая теперь через $w(\delta; \frac{\partial f}{\partial t})$ модуль непрерывности (колебание) функции $\frac{\partial f}{\partial t}$, получим

$$\left|\frac{\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)}{\Delta t} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx\right| \le$$

[11] Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) - французский математик. Исследования посвящены механике, геометрии, дифференциальным уравнениям, математическому анализу и алгебре.

$$\int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t+\Theta\Delta t) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| dx \le$$

$$\int_a^b w(\Delta t; \frac{\partial f}{\partial t})dx = w(\Delta t; \frac{\partial f}{\partial t})(b-a). \tag{3.2.2}$$

В силу равномерной непрерывности функции $\frac{\partial f}{\partial t}$ на прямоугольнике Π имеем

$$\lim_{\Delta t\to 0} w(\Delta t; \frac{\partial f}{\partial t}) = 0.$$

Поэтому из (3.2.2) имеем

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)}{\Delta t} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx. \triangleright$$

Теперь перейдем к вопросу о дифференцировании интеграла (3.1.1).

ТЕОРЕМА 3.2.2.*Пусть функция f и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial t}$ непрерывно дифференцируемы на прямоугольнике Π и пусть $\overline{\Omega} \subset \Pi$. Если функции φ и ψ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha,\beta]$, тогда и функция Φ дифференцируема на этом отрезке, причем*

$$\frac{d\Phi}{dt}(t) = f(\psi(t),t)\frac{d\psi}{dt} - f(\varphi(t),t)\frac{d\varphi}{dt} +$$

$$\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx. \tag{3.2.3}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2.1. Соотношение (3.2.3) называется *формулой Лейбница* [12].

[12] Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646-1716) - немецкий математик, физик, философ, историк, языковед. Один из основоположников математического анализа.

◃ Рассмотрим функцию

$$F(t,u,v)=\int\limits_u^v f(x,t)dx,\ t\in[\alpha,\beta],\ u,v\in[a,b].$$

Поскольку

$$\frac{\partial F}{\partial v}=f(v,t),\frac{\partial F}{\partial u}=-f(u,t),$$

то эти частные производные непрерывны по совокупности переменных t,u,v. Рассмотрим частную производную $\frac{\partial F}{\partial t}$. Ее существование следует из теоремы 3.2.1, причем

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\int\limits_u^v \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx.$$

Докажем ее непрерывность. Пусть точки $u,u+\Delta u\in[a,b],v,v+\Delta v\in[a,b].t,t+\Delta t\in[\alpha,\beta]$. Полагая

$$\Delta\frac{\partial F(t,u,v)}{\partial t}=\frac{\partial F(t+\Delta t,u+\Delta u,v+\Delta v)}{\partial t}-\frac{\partial F(t,u,v)}{\partial t},$$

получим

$$\left|\Delta\frac{\partial F(t,u,v)}{\partial t}\right|=\left|\int\limits_{u+\Delta u}^{v+\Delta v}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t+\Delta t)dx-\int\limits_u^v\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx\right|\le$$

$$\left|\int\limits_u^v\left(\frac{\partial f}{\partial t}(x,t+\Delta t)-\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right)dx\right|+$$

$$\left|\int\limits_{u+\Delta u}^{u}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t+\Delta t)dx\right|+\left|\int\limits_{v}^{v+\Delta v}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t+\Delta t)dx\right|. \qquad (3.2.4)$$

Поскольку функция $\frac{\partial f}{\partial t}$ определена на прямоугольнике Π, то все написанные выше интегралы имеют смысл, причем

$$|v-u|<b-a.$$

Далее, из непрерывности функции $\frac{\partial f}{\partial t}$ на Π следует ее ограниченность, т.е. существует такая константа M, что для всех $(x,t)\in\Pi$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right|\le M. \qquad (3.2.5)$$

Теперь, обозначая через $w(\delta;\frac{\partial f}{\partial t})$ модуль непрерывности функции $\frac{\partial f}{\partial t}$ на прямоугольнике Π, с учетом (3.2.4) и (3.2.5) получим

$$\left|\Delta\frac{\partial F(t,u,v)}{\partial t}\right|\le w(\Delta t;\frac{\partial f}{\partial t})\left|\int\limits_u^v dx\right|+$$

$$M\left|\int\limits_{u+\Delta u}^{u}dx\right|+M\left|\int\limits_{v}^{v+\Delta v}dx\right|\le$$

$$w(\Delta t;\frac{\partial f}{\partial t})(b-a)+M|\Delta u|+M|\Delta v|.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\sqrt{\Delta t^2+\Delta u^2+\Delta v^2}\to 0}\Delta\frac{\partial F(t,u,v)}{\partial t}=0.$$

Это и означает непрерывность частной производной $\frac{\partial F}{\partial t}$ по совокупности переменных t,u,v. Связь между функциями Φ и F устанавливается формулой

$$\Phi(t)=F(t,\varphi(t),\psi(t)).$$

В силу доказанного выше функцию Φ можно дифференцировать по t, причем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Подставляя сюда найденные выражения для частных производных, получим формулу (3.2.3).▹

3.3. Равномерная сходимость несобственных интегралов с параметром

Мы будем рассматривать интегралы вида

$$\Phi(t) = \int_a^b f(x,t)dx, \tag{3.3.1}$$

где $-\infty \le a < b \le \infty$, параметр $t \in T$ и интеграл при некоторых (в частности, при всех) t является несобственным. Если для каждого $t \in T$ интеграл (3.3.1) сходится, то интеграл называют *сходящимся на множестве* T.

В дальнейшем, если не оговорено что-либо другое, будем рассматривать только случай, когда выполняются следующие условия:

(i) $-\infty < a < b \le \infty$;

(ii) при любом $t \in T$ функция $f(x,t)$ по переменной x интегрируема по Риману на каждом отрезке $[a,\eta]$, где $\eta \in (a,b)$.

В этом случае сходимость интеграла (3.3.1) на множестве T означает, что при любом $t \in T$ существует предел

$$\lim_{\eta\to b-} \int_a^\eta f(x,t)dx = \int_a^b f(x,t)dx.$$

Поскольку

$$\int_a^b f(x,t)dx = \int_a^\eta f(x,t)dx + \int_\eta^b f(x,t)dx,$$

то из сказанного при любом фиксированном $t \in T$ получим

$$\lim_{\eta\to b-} \int_\eta^b f(x,t)dx = 0.$$

Таким образом, если интеграл (3.3.1) сходится на множестве T, то

$$\forall t \in T\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \Theta \in (a,b)\ \forall \eta > \Theta\ \left|\int_\eta^b f(x,t)dx\right| < \varepsilon.$$

Теперь введем одно полезное понятие, без которого в теории несобственных интегралов с параметрами просто не обойтись.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.1. Интеграл (3.3.1) называется *равномерно сходящимся* на множестве T, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \Theta \in (a,b)\ \forall \eta \in (\Theta,b)\ \forall t \in T\ \left|\int_\eta^b f(x,t)dx\right| < \varepsilon.$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.3.1. Показать, что из равномерной сходимости интеграла (3.3.1) на множестве T следует сходимость этого интеграла.

ТЕОРЕМА 3.3.1.*Интеграл (3.3.1) равномерно сходится на множестве T точно тогда, когда*

$$\lim_{\eta\to b-} \sup_{t\in T} \left|\int_\eta^b f(x,t)dx\right| = 0. \tag{3.3.2}$$

◁ Пусть интеграл (3.3.1) равномерно сходится. Тогда в силу определения 3.3.1

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \Theta \in (a,b)\ \forall \eta \in (\Theta,b)\ \forall t \in T\ \left|\int_\eta^b f(x,t)dx\right| < \varepsilon - \delta$$

при некотором $\delta \in (0,\varepsilon)$. Отсюда получаем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \Theta \in (a,b)\ \forall \eta \in (\Theta,b)\ \sup_{t\in T} \left|\int_\eta^b f(x,t)dx\right| < \varepsilon, \tag{3.3.3}$$

а это и означает существование предела (3.3.2).

Теперь пусть существует предел (3.3.2), тогда справедливо (3.3.3). Поскольку

$$\left|\int_\eta^b f(x,t)dx\right| \le \sup_{s\in T} \left|\int_\eta^b f(x,s)dx\right| \quad \forall t \in T,$$

то отсюда непосредственно вытекает определение 3.3.1.▷

В ряде случаев для установления равномерной сходимости интеграла (3.3.1) очень полезно следующее достаточное условие.

ТЕОРЕМА 3.3.2 (признак Вейерштрасса).*Пусть существует функция* $\varphi : [a,b) \to \{0\} \cup \mathbf{R}_+$, *интегрируемая по Риману на каждом отрезке* $[a,\eta]$, *и такая, что*

(i)$|f(x,t)| \le \varphi(x)$ $x \in [a,b)$, $t \in T$;

(ii) интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ *сходится.*

Тогда интеграл (3.3.1) равномерно сходится на множестве T.

◁ В силу условия (ii) имеем следующее: при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\Theta \in (a,b)$, что при любом $\eta \in (\Theta, b)$ $\int\limits_\eta^b \varphi(x)dx < \varepsilon$.

Далее, заметим, что в силу первого признака сравнения интеграл (3.3.1) абсолютно сходится на множестве T. Поэтому

$$\left|\int_\eta^b f(x,t)dx\right| \le \int_\eta^b |f(x,t)|dx \le \int\limits_\eta^b \varphi(x)dx < \varepsilon.$$

Последнее в силу определения 3.3.1 означает равномерную сходимость интеграла (3.3.1).▷

3.4. Непрерывность несобственных интегралов с параметром

При изучении свойств несобственных интегралов с параметром очень часто приходится иметь дело с перестановкой пределов по различным переменным. Поэтому начнем с изучения этого вопроса.

ЛЕММА 3.4.1.*Пусть даны множество* $X \times T \subset \mathbf{R}^2$ *и функция* $f : X \times T \to \mathbf{R}$. *Пусть* x_0 *и* t_0 *– числа или символы* $-\infty, +\infty$ *или* ∞. *Пусть существуют пределы*

$$\varphi(x) = \lim_{t\to t_0} f(x,t)\ \forall x \in X \text{ и } \psi(t) = \lim_{x\to x_0} f(x,t)\ \forall t \in T.$$

Если стремление функции f *хоть к одному из указанных пределов происходит равномерно, то существуют и равны оба*

повторных предела

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{t\to t_0} f(x,t) = \lim_{t\to t_0}\lim_{x\to x_0} f(x,t).$$

◁ Пусть для определенности функция f равномерно на X стремится к $\varphi(x)$ при $t \to t_0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $\mathcal{O}_{t_0}$ такая, что каковы бы ни были $t \in \mathcal{O}_{t_0} \cap T$ и $x \in X$, выполняется неравенство

$$|f(x,t) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon - \delta}{2}, \delta \in (0,\varepsilon). \tag{3.4.1}$$

Если $t_1, t_2 \in \mathcal{O}_{t_0} \cap T$, то

$$|f(x,t_1) - f(x,t_2)| \le |f(x,t_1) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - f(x,t_2)| < \varepsilon - \delta.$$

Переходя здесь к пределу при $x \to x_0$, получим

$$|\psi(t_1) - \psi(t_2)| < \varepsilon. \tag{3.4.2}$$

Отсюда согласно критерию Коши вытекает существование предела

$$\lim_{t\to t_0} \psi(t) = A.$$

Зафиксируем теперь $t_1 \in \mathcal{O}_{t_0} \cap T$, тогда из (3.4.1) при $t = t_1$ и из (3.4.2) при $t_2 \to t_0$ получим

$$|f(x,t_1) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon - \delta}{2}, \quad |\psi(t_1) - A| \le \varepsilon. \tag{3.4.3}$$

Для всех $t \in T$ существует предел $\lim\limits_{t\to t_0} f(x,t) = \psi(t)$. Поэтому при фиксированном $t_1 \in \mathcal{O}_{t_0} \cap T$ для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $\mathcal{O}_{x_0} \cap X$, что при всех $x \in \mathcal{O}_{x_0} \cap X$ имеем

$$|f(x,t_1) - \psi(t_1)| < \varepsilon. \tag{3.4.4}$$

Поэтому из (3.4.3) и (3.4.4) следует

$$|\varphi(x) - A| \le |\varphi(x) - f(x,t_1)| + |f(x,t_1) - \psi(t_1)| + |\psi(t_1) - A| < 3\varepsilon,$$

что и означает существование предела

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = A.▷$$

ТЕОРЕМА 3.4.1. *Пусть функция* $f : [a,b) \times T \to \mathbf{R}$ *непрерывна по* $x \in [a,b)$ *при любом* $t \in T$. *Пусть при любом* $\eta \in (a,b)$ *функция* f *равномерно на* $[a,\eta]$ *стремится к функции* φ *при* $t \to t_0$. *Пусть интеграл*

$$\int\limits_a^b f(x,t)dx$$

равномерно сходится на множестве T. *Тогда*

$$\lim_{t\to t_0} \int\limits_a^b f(x,t)dx = \int\limits_a^b \lim_{t\to t_0} f(x,t)dx = \int\limits_a^b \varphi(x)dx. \tag{3.4.5}$$

◃ Пусть $\eta \in (a,b)$, тогда в силу леммы 3.4.1 имеем

$$\lim_{t\to t_0} \int\limits_a^\eta f(x,t)dx = \int\limits_a^\eta \lim_{t\to t_0} f(x,t)dx = \int\limits_a^\eta \varphi(x)dx. \tag{3.4.6}$$

Поэтому (3.4.5) можно переписать в виде

$$\lim_{t\to t_0} \lim_{\eta\to b-} \int\limits_a^\eta f(x,t)dx = \lim_{\eta\to b-} \lim_{t\to t_0} \int\limits_a^\eta f(x,t)dx.$$

Таким образом, остается доказать возможность перестановки пределов для функции

$$\Phi(t,\eta) = \int\limits_a^\eta f(x,t)dx.$$

Поскольку из (3.4.6) следует существование предела $\lim\limits_{t\to t_0} \Phi(t,\eta)$ и имеет место равномерная сходимость

$$\lim_{\eta\to b-} \Phi(t,\eta) = \int\limits_a^b f(x,t)dx,$$

то в силу леммы 3.4.1 теорема доказана. ▹

СЛЕДСТВИЕ 3.4.1.*Пусть функция* $f \in C(\Omega)$, *где* $\Omega = \{(x,t) \in \mathbf{R}^2 : x \in [a,b), t \in [c,d]\}$. *Тогда если интеграл*

$$\Phi(t) = \int\limits_a^b f(x,t)dx$$

сходится равномерно на $[c,d]$, *то он является непрерывной на этом отрезке функцией.*

◃ Каково бы ни было $t_0 \in [c,d]$ функция $f(x,t)$ при $t \to t_0$ равномерно на любом отрезке $[a,\eta], \eta \in (a,b)$ стремится к функции $f(x,t_0)$, поэтому в силу теоремы 3.4.1 имеем

$$\lim_{t\to t_0} \Phi(t) = \int\limits_a^b \lim_{t\to t_0} f(x,t)dx = \Phi(t_0). \triangleright$$

3.5. Интегрируемость и дифференцируемость несобственных интегралов с параметром

Сначала рассмотрим более простой случай.

ТЕОРЕМА 3.5.1.*Пусть функция* $f \in C(\Omega)$, *где* $\Omega = \{(x,t) \in \mathbf{R}^2 : x \in [a,b), t \in [c,d]\}$. *Тогда функция*

$$\Phi(t) = \int\limits_a^b f(x,t)dx$$

интегрируема по Риману на отрезке $[c,d]$, *причем*

$$\int\limits_c^d \Phi(t)dt = \int\limits_c^d dt \int\limits_a^b f(x,t)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,t)dt.$$

◃ Пусть $\eta \in (a,b)$, тогда по теореме 3.1.2 имеем

$$\int\limits_c^d dt \int\limits_a^\eta f(x,t)dx = \int\limits_a^\eta dx \int\limits_c^d f(x,t)dt. \tag{3.5.1}$$

Функция

$$\Phi_\eta(t) = \int\limits_a^\eta f(x,t)dx$$

непрерывна на $[c,d]$ и при $\eta \to b-$ равномерно на $[c,d]$ стремится к своему пределу Φ, поэтому по теореме 3.1.1 в левой части (3.5.1) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $\eta \to b-$.

$$\lim_{\eta\to b-} \int\limits_c^d dt \int\limits_a^\eta f(x,t)dx = \int\limits_c^d \Phi(t)dt,$$

при этом полученный предел конечен. Следовательно, при $\eta \to b-$ существует тот же предел и у правой части (3.5.1), который в силу определения несобственного интеграла равен

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,t)dt. \triangleright$$

Теперь рассмотрим более сложный случай, когда оба интеграла несобственные.

ТЕОРЕМА 3.5.2.*Пусть функция $f \in C(\Omega)$, где $\Omega = \{(x,t) \in \mathbf{R}^2 : x \in [a,b), t \in [c,d)\}$, причем*

$$-\infty < a < b \le +\infty, \quad -\infty < c < d \le +\infty.$$

Пусть интеграл

$$\int\limits_a^b f(x,t)dx$$

равномерно сходится на любом отрезке $[c,\eta]$, где $\eta \in (c,d)$, а интеграл

$$\int\limits_c^d f(x,t)dt$$

равномерно сходится на любом отрезке $[a,\xi]$, где $\xi \in (a,b)$. Пусть, наконец, существует по крайней мере один из двух повторных

интегралов

$$\int\limits_c^d dt \int\limits_a^b |f(x,t)|dx, \quad \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d |f(x,t)|dt.$$

Тогда

$$\int\limits_c^d dt \int\limits_a^b |f(x,t)|dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d |f(x,t)|dt,$$

причем каждый из повторных интегралов существует.

$\triangleleft$ Пусть для определенности сходится интеграл

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d |f(x,t)|dt.$$

В силу равномерной сходимости на отрезке $[a,\xi]$ интеграла (3.5.2) по теореме 3.5.1 имеем

$$\int\limits_c^\eta dt \int\limits_a^b f(x,t)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^\eta f(x,t)dt. \tag{3.5.3}$$

В силу теоремы 3.1.1 функция

$$\Phi_\eta(x) = \int\limits_c^\eta f(x,t)dt$$

непрерывна на $[a,b]$ и равномерно сходится к функции (3.5.2) на любом отрезке $[a,\xi]$. Интеграл

$$\int\limits_a^b \Phi_\eta(x)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^\eta f(x,t)dt$$

равномерно сходится, поскольку

$$|\Phi_\eta(x)| \le \int\limits_c^d |f(x,t)|dt.$$

Значит, выполнены условия теоремы 3.4.1. Поэтому

$$\lim_{\eta\to b-}\int_a^b \Phi_\eta(x)dx = \int_a^b \lim_{\eta\to b-}\Phi_\eta(x)dx = \int_a^b\int_c^d f(x,t)dt.$$

Итак, требуемое равенство получается из равенства (3.5.3) предельным переходом при $\eta \to b-$.▷

ТЕОРЕМА 3.5.3.*Пусть функция* $f, \frac{\partial f}{\partial t} \in C(\Omega)$, *где* $\Omega = \{(x,t) \in \mathbf{R}^2 : x \in [a,b), t \in [c,d]\}$. *Пусть интеграл*

$$\int_a^b f(x,t)dx$$

сходится, а интеграл

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx \tag{3.5.4}$$

равномерно сходится на отрезке $[c,d]$. *Тогда функция*

$$\Phi(t) = \int_a^b f(x,t)dx$$

непрерывно дифференцируема на $[c,d]$, *причем*

$$\frac{d\Phi}{dt}(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx.$$

◁ Представим функцию Φ в виде ряда

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} f(x,t)dx, \tag{3.5.5}$$

где $\{\eta_k\}$ – последовательность такая, что $\eta_k \in [a,b), \eta_1 = a$ и $\eta_k \to b$ при $k \to +\infty$, а функцию (3.5.4) – в виде ряда

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx. \tag{3.5.6}$$

Ряд (3.5.5) сходится, а ряд (3.5.6) равномерно сходится.

Согласно теореме (3.2.1) каждый член ряда (3.5.6) является производной соответствующего члена ряда (3.5.5), поэтому в силу теоремы о дифференцировании рядов сумма ряда (3.5.6) является производной суммы ряда (3.5.5).▷

3.6. Эйлеровы[13] интегралы

Рассмотрим интегралы

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \tag{3.6.1}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \tag{3.6.2}$$

называемые *эйлеровыми интегралами* соответственно *первого* и *второго рода*. Интеграл (3.6.1) называется также *бета-функцией*, а интеграл (3.5.2) – *гамма-функцией*.

ТЕОРЕМА 3.6.1.*Функция* $B(p,q)$ *определена и непрерывна при всех* $p,q \in \mathbf{R}_+$.

◁ Представим интеграл (3.6.1) в виде

$$B(p,q) = \int_0^{0,5} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx + \int_{0,5}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

Сравнивая первый интеграл в правой части с интегралом $\int_0^{0,5} x^{p-1}dx$, а второй интеграл с интегралом $\int_0^{0,5}(1-x)^{q-1}dx$, которые сходятся соответственно при $p > 0$ и $q > 0$ и расходятся

[13] Леонард Эйлер (1707-1783) – математик, механик, физик и астроном. Один из величайших ученых XVIII века. Его научные интересы относились ко всем основным областям естествознания, к которым можно было применить математические методы.

при $p \le 0$ и $q \le 0$, в силу теоремы сравнения получаем, что областью определения бета-функции является координатный угол $p, q \in \mathbf{R}_+$.

Далее, интеграл (3.6.1) равномерно сходится в каждом прямом угле $p \ge p_0 > 0$ и $q \ge q_0 > 0$. Это следует из неравенства

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \le xp_0 - 1(1-x)^{q_0-1}, \quad x \in [0,1]$$

и признака Вейерштрасса в силу доказанной выше сходимости интеграла $B(p_0, q_0)$.

Поскольку всякая точка $(p, q) \in \mathbf{R}_+^2$ лежит в некотором угле $p > p_0 > 0,\ q > q_0 > 0$, то отсюда в силу теоремы 3.4.1 следует непрерывность функции $B(p, q)$ во всей области определения.$\triangleright$

ТЕОРЕМА 3.6.2. *Функция* $\Gamma(\alpha)$ *определена и непрерывна при всех* $\alpha \in \mathbf{R}_+$.

$\triangleleft$ Представим интеграл (3.6.2) в виде

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx. \tag{3.6.3}$$

Сравнивая первый интеграл в правой части с интегралом $\int_0^1 x^{\alpha-1}dx$, который сходится при $\alpha > 0$ и расходится при $\alpha \le 0$, получаем, что он тоже сходится и расходится при тех же значениях параметра α. Что же касается второго интеграла, то он сходится при всех $\alpha \in \mathbf{R}$.

Покажем теперь, что интеграл (3.6.2) равномерно сходится на любом отрезке $[\alpha_0, \alpha_1]$, где $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbf{R}_+$. Действительно, если $x \in [0,1]$, то

$$x^{\alpha-1}e^{-x} \le x^{\alpha_0-1}e^{-x},$$

а если $x \in [1, +\infty)$, то

$$x^{\alpha-1}e^{-x} \le x^{\alpha_1-1}e^{-x}.$$

Отсюда в силу признака Вейерштрасса следует равномерная сходимость интеграла (3.6.2) и, как следствие, его непрерывность на $\mathbf{R}_+$.$\triangleright$

УПРАЖНЕНИЕ 3.6.1. Доказать сходимость второго интеграла в правой части (3.6.3) при всех $\alpha \in \mathbf{R}$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.6.2. Доказать, что функции $B(p, q)$ и $\Gamma(\alpha)$ бесконечно дифференцируемы.

Отметим некоторые свойства интегралов (3.6.1) и (3.6.2).

СВОЙСТВА ГАММА-ФУНКЦИЙ.

(Г1). $\Gamma(\alpha) > 0\ \forall \alpha \in \mathbf{R}_+$.

В частности, гамма-функция не имеет нулей.

(Г2). $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)\ \forall \alpha \in \mathbf{R}_+$.

Действительно, интегрируя (3.6.2) по частям, получим

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx = -x^{\alpha}e^{-x}\Big|_0^{+\infty} +$$

$$\alpha\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Таким образом, если $\alpha > n$, где $n \in \mathbf{N}$, то

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)(\alpha-1)...(\alpha-n)\Gamma(\alpha-n).$$

Замечая, что $\Gamma(1) = 1$, отсюда получаем $\Gamma(n+1) = n!$. Другими словами, гамма-функция – это продолжение функции $\alpha!$, определенной только для неотрицательных целых чисел, на всю полуось $\alpha > 0$.

СВОЙСТВА БЕТА-ФУНКЦИИ.

(B1). $B(p, q) = B(q, p) \quad \forall p, q \in \mathbf{R}_+$.

Чтобы в этом убедиться, достаточно в интеграле (3.6.1) сделать замену переменной $y = 1 - x$.

(B2). $B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1}B(p, q-1),\ p > 0, q > 1$.

Действительно, интегрируя (3.6.1) по частям и замечая, что $x^p(1-x)^{q-2} = x^{p-1}(1-x)^{q-2} - x^{p-1}(1-x)^{q-1}$, получим

$$B(p,q) = \int_0^1 (1-x)^{q-1}\frac{dx^p}{p} = \frac{x^p(1-x)^{q-1}}{p}\Bigg|_0^1 +$$

$$\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}dx = \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}dx -$$

$$\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{q-1}{p}B(p, q-1) - \frac{q-1}{p}B(p,q).$$

Заметим, что в силу (B1) из (B2) следует, что

$$B(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q), \quad p>1, q>0.$$

(B3). $B(n,p) = \frac{(n-1)!}{p(p+1)\dots(p+n-1)}$, $p>0, n\in \mathbf{N}$.

Это свойство непосредственно получается из (B2), если заметить, что $B(p,1)=p^{-1}$. Если же $p=m\in\mathbf{N}$, то

$$B(m,n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Между интегралами Эйлера существует связь, которая устанавливается формулой

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Доказательство этой формулы ввиду его сложности мы опускаем.

4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Отец всегда говорил: "Если попадется под руку курица, бери ее, потому что если тебе самому не нужна, то пригодится кому-нибудь другому, а доброе дело даром никогда не пропадет", – это такая у него была поговорка. Но я ни разу не видывал, чтобы курица не самому пригодилась папаше.
Марк Твен. Приключения Гекльберри Финна

4.1. Преобразование Лапласа [14]

Пусть функция $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

(i) $f(t)=0$ при $t<0$;

(ii) при $t\geq 0$ функция f на любом ограниченном промежутке имеет не более чем конечное множество разрывов первого рода и других разрывов функция f не имеет;

(iii) существуют константы $M, a\in\mathbf{R}_+$ такие, что $|f(t)|\leq Me^{at}$ при всех $t\in\mathbf{R}$. Точная нижняя грань тех значений a, для которых имеет место это неравенство, называется *показателем роста* функции f и обозначается символом $\delta(f)$.

Множество всех функций, удовлетворяющих условиям (i)-(iii), обозначим символом $\mathcal{L}$. Легко видеть, что множество $\mathcal{L}\neq\emptyset$, в частности, его элементом является *функция Хевисайда*[15]

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, t<0; \\ 1, t\geq 0. \end{cases}$$

[14] Пьер Симон Лаплас (1749-1827) – французский математик. Важнейшие направления его исследований – математика, небесная механика и математическая физика.

[15] Оливер Хевисайд (1850-1925) – английский математик. Заложил основы операционного исчисления.

УПРАЖНЕНИЕ 4.1.1. Пусть функции $f,g \in \mathcal{L}$. Доказать, что функции $f+g, f\cdot g \in \mathcal{L}$, причем $\delta(f+g) = \max\{\delta(f), \delta(g)\}, \delta(f\cdot g) = \delta(f)+\delta(g)$.

Из упражнения 4.1.1. следует, в частности, что множество $\mathcal{L}$ является линейным пространством.

УПРАЖНЕНИЕ 4.1.2. Показать, что многочлен любой степени $P_m(t) = a_m t^m + a_{m-1}t^{m-1} + ... + a_1 t + a_0$ принадлежит множеству $\mathcal{L}$, причем $\delta(P_m) = 0$ при любом $m \in \{0\} \cup \mathbf{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.1. Пусть функция $f \in \mathcal{L}$. *Преобразованием Лапласа* функции f называется функция

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt,\ p \in \mathbf{C}. \tag{4.1.1}$$

Поскольку функция F определяется несобственным интегралом, то для корректности определения необходимо убедиться в его сходимости.

ТЕОРЕМА 4.1.1.*Пусть функция $f \in \mathcal{L}$. Тогда интеграл (4.1.1) абсолютно сходится в области $\mathrm{Re}\, p > \delta(f)$, причем при всех $x_0 > \delta(f)$ интеграл (4.1.1) при $\mathrm{Re}\, p \geq x_0$ сходится равномерно.*

$\triangleleft$ Пусть $p = x+iy$, причем $x > \delta(f)$. Тогда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $x > a = \delta(f)+\varepsilon$. Поэтому, воспользовавшись признаком сравнения сходимости несобственных интегралов, имеем

$$|F(p)| = \left|\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt\right| \leq M\int_0^\infty e^{-xt}e^{at}dt = \frac{M}{x-a}, x > a,$$

что позволяет сделать вывод об абсолютной сходимости интеграла (4.1.1).

Если $x \geq x_0 > \delta(f)$, то аналогичная оценка дает

$$|F(p)| \leq M\int_0^\infty e^{-(x_0-a)t}dt = \frac{M}{x_0-a},$$

что в силу теоремы Вейерштрасса гарантирует равномерную сходимость интеграла (4.1.1) по параметру p в области $\mathrm{Re}\, p \geq x_0 > \delta(f)$.$\triangleright$

УПРАЖНЕНИЕ 4.1.3. Пусть функция $f \in \mathcal{L}$. Доказать, что $|F(p)| \to 0$ при $\mathrm{Re}\, p \to +\infty$ равномерно относительно $\arg p$.

ТЕОРЕМА 4.1.2.*Пусть функция $f \in \mathcal{L}$. Тогда ее преобразование Лапласа F является аналитической в области $\mathrm{Re}\, p > \delta(f)$ функцией.*

$\triangleleft$ В силу теоремы 4.1.1 интеграл (4.1.1) сходится в области $\mathrm{Re}\, p > \delta(f)$. Разобьем интервал интегрирования на отрезки $[t_{k-1}, t_k]$, $k \in \mathbf{N}$ произвольной конечной длины, причем $t_0 = 0$, $t_n \to +\infty, k \to \infty$. Тогда функция $F(p)$ при $\mathrm{Re}\, p > a$ представляет собой сумму сходящегося ряда

$$F(p) = \sum_{k=0}^\infty \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-pt}f(t)dt = \sum_{k=0}^\infty u_k(p). \tag{4.1.2}$$

Заметим, что поскольку k-ый остаток ряда равен $\int_{t_{k+1}}^\infty e^{-pt}f(t)dt$, то ряд (4.1.2) равномерно сходится (по теореме 4.1.1) в области $\mathrm{Re}\, p \geq x_0 > \delta(f)$. Каждая из функций

$$u_k(p) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-pt}f(t)dt$$

в силу неравенства

$$|u_k(p)| = |\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-pt}f(t)dt| \leq M\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-(\mathrm{Re}\, p-a)t}dt =$$

$$\frac{M}{\mathrm{Re}\, p - a}\left(e^{-(\mathrm{Re}\, p-a)t_k} - e^{-(\mathrm{Re}\, p-a)t_{k+1}}\right)$$

является целой функцией, и в силу теоремы Вейерштрасса ряд определяет в области $\mathrm{Re}\, p > \delta(f)$ аналитическую функцию. Условимся в дальнейшем связь между функцией $f = f(t)$ и ее преобразованием Лапласа $F = F(p)$ обозначать следующим образом: $f(t) \doteqdot F(p)$.

ПРИМЕР 4.1.1. Рассмотрим функцию Хевисайда

$$\sigma(t) \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt}dt = \frac{1}{p},\ \mathrm{Re}\, p > 0.$$

ПРИМЕР 4.1.2. Рассмотрим показательную функцию

$$e^{\alpha t} \doteqdot \int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-pt}dt = \frac{1}{p-\alpha},\ \mathrm{Re}\, p > \alpha.$$

ПРИМЕР 4.1.3. Рассмотрим степенную функцию $f(t) = t^\nu, \nu > 0$. Пусть $p = x + iy$. Найдем сначала интеграл

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt} + t^\nu dt = \left| \begin{matrix} xt = s \\ ds = xdt \end{matrix} \right| =$$

$$\frac{1}{x^{\nu+1}} \int_0^\infty e^{-s} s^\nu ds = \frac{\Gamma(\nu+1)}{x^{\nu+1}},$$

где $\Gamma(\nu+1)$ – гамма-функция Эйлера. Продолжая аналитически эту функцию в область $\mathrm{Re}\, p > 0$, получим

$$t^\nu \doteqdot \int_0^\infty t^\nu e^{-pt} dt = \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}, \tag{4.1.3}$$

при этом в случае дробных ν следует выбирать ту ветвь многозначной функции $\frac{1}{p^{\nu+1}}$, которая является непосредственным аналитическим продолжением функции $\frac{1}{x^{\nu+1}}, x \in \mathbf{R}_+$. Для целых $\nu = n$ из (4.1.3) получим

$$t^n \doteqdot \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}. \tag{4.1.4}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1.1. Очевидно, что преобразование Лапласа можно применять и к функциям вида $f + ig$, где $f, g \in \mathcal{L}$.

4.2. Свойства преобразования Лапласа

В п.4.1 мы уже обнаружили два основных свойства преобразования Лапласа, а именно – аналитичность функции $F(p)$ в области $\mathrm{Re}\, p > \delta(f)$ и ее стремление к нулю на бесконечности. Однако этим свойства преобразования Лапласа не исчерпываются.

ТЕОРЕМА 4.2.1. *Пусть функции* $f_k \in \mathcal{L},\ k = 1, 2, ..., n$. *Тогда* $f(t) \doteqdot F(p), \mathrm{Re}\, p > \max\limits_{k=1,2,...,n} \{\delta(f_k)\}$, *где*

$$f(t) = \sum_{k=1}^n a_k f_k(t), \quad F(p) = \sum_{k=1}^n a_k F_k(p),$$

$f_k(t) \doteqdot F_k(p),\ \mathrm{Re}\, p > \delta(f_k),\ a_k \in \mathbf{R}, k = 1, ..., n.$

УПРАЖНЕНИЕ 4.2.1. Доказать теорему 4.2.1.

ТЕОРЕМА 4.2.2. *Пусть функция* $f \in \mathcal{L}$ *и* $f(t) \doteqdot F(p),\ \mathrm{Re}\, p > \delta(f)$. *Тогда*

$$f(at) \doteqdot a^{-1} F(a^{-1} p,\ \mathrm{Re}\, p > \delta(f),\ a \in \mathbf{R}_+.$$

$$\triangleleft \int_0^\infty e^{-pt} f(at) dt = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-\frac{p}{a}\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{a} F(\frac{p}{a}). \triangleright$$

ТЕОРЕМА 4.2.3. *Пусть функция* $f \in \mathcal{L}$ *и* $f(t) \doteqdot F(p)$, $\mathrm{Re}\, p > \delta(f)$. *Пусть задана функция*

$$f_\tau(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < \tau, \\ f(t-\tau) \text{ при } t \geq \tau, \end{cases}$$

$\tau \in \mathbf{R}_+$. *Тогда* $f_\tau(t) \doteqdot F_\tau(p) = e^{-p\tau} F(p),\ \mathrm{Re}\, p > \sigma(f)$.

$$\triangleleft F_\tau(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f_\tau(t) dt = \int_\tau^\infty e^{-pt} f(t-\tau) dt =$$

$$\left| \begin{matrix} t - \tau = s \\ ds = dt \end{matrix} \right| = \int_0^\infty e^{-p(s+\tau)} f(s) ds = e^{-p\tau} F(p). \triangleright$$

УПРАЖНЕНИЕ 4.2.2. Доказать, что функция $f_\tau \in \mathcal{L}$ при любом $\tau \in \mathbf{R}_+$, причем $\delta(f_\tau) = \delta(f)$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.2.3. Пусть функция $f^{(n)} \in \mathcal{L}$. Доказать, что функция $f^{(n-1)} \in \mathcal{L}$ при любом $n \in \mathbf{N}$, причем $\delta(f^{(n)}) = \delta(f^{(n-1)})$.

ТЕОРЕМА 4.2.4. *Пусть функция* $f' \in \mathcal{L}$, *тогда* $f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0)$, $\mathrm{Re}\, p > \delta(f)$, *где* $f(t) \doteqdot F(p)$.

$\triangleleft$ Действительно,

$$f'(t) \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt} f'(t) dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt =$$

$$pF(p) - f(0). \triangleright$$

УПРАЖНЕНИЕ 4.2.4. Пусть функция $f^{(n)} \in \mathcal{L}$. Доказать, что

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n \{F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - ... - \frac{f^{(n)}(0)}{p^n}\},$$

$\mathrm{Re}\, p > \delta(f)$, где $f(t) \doteqdot F(p)$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.2.5. Пусть функция $f \in \mathcal{L}$. Доказать, что функция $\varphi \in \mathcal{L}$, где

$$\varphi(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 ... \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n,$$

причем $\delta(f) = \delta(\varphi)$.

ТЕОРЕМА 4.2.5. *Пусть функция $f \in \mathcal{L}$. Тогда*

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \doteqdot \frac{1}{p} F(p), \ \mathrm{Re}\, p > \delta(f),$$

где $f(t) \doteqdot F(p)$.

◁ Действительно,

$$\varphi(t) \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_0^t e^{-pt} dt = \frac{1}{p} F(p). \triangleright$$

УПРАЖНЕНИЕ 4.2.6. Пусть функция $f \in \mathcal{L}$. Доказать, что

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 ... \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \doteqdot \frac{1}{P^n} F(p), \ \mathrm{Re}\, p > \delta(f),$$

где $f(t) \doteqdot F(p)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2.1. *Сверткой* $f * g$ двух функций $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ называется интеграл

$$f * g(t) = \int\limits_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau,$$

если он существует.

УПРАЖНЕНИЕ 4.2.7. Пусть функции $f, g \in \mathcal{L}$. Доказать, что $f * g \in \mathcal{L}$, причем $\delta(f * g) = \max\{\delta(f), \delta(g)\}$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.2.8. Пусть функции $f, g \in \mathcal{L}$. Доказать, что $f * g = g * f$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2.1. Коммутативность свертки имеет место и при более общих предположениях, чем те, что в упражнении 4.2.8.

ТЕОРЕМА 4.2.6. *Пусть функции $f, g \in \mathcal{L}$, тогда*

$$f * g(t) = F(p) \cdot G(p), \ \mathrm{Re}\, p > \max\{\delta(f), \delta(g)\},$$

где $f(t) \doteqdot F(p)$, $\mathrm{Re}\, p > \delta(f)$ и $g(t) \doteqdot G(p)$, $\mathrm{Re}\, p > \delta(g)$.

◁ Действительно,

$$f * g(t) \doteqdot \int\limits_0^\infty e^{-pt} dt \int\limits_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int\limits_0^t e^{-pt} g(t-\tau) dt =$$

$$\left| \begin{matrix} t - \tau = t' \\ dt = dt' \end{matrix} \right| = \int_0^\infty e^{-pt} g(\tau) d\tau \cdot \int_0^\infty e^{-pt'} f(t') dt' = F(p) \cdot G(p). \triangleright$$

4.3. Обратное преобразование Лапласа

Определим множество функций $\mathcal{L}^{-1} = \{F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}\}$ комплексной переменной $p = \xi + i\eta$ следующим образом: функция $F \in \mathcal{L}^{-1}$, если

(i) $F(p)$ – аналитическая функция в области $\mathrm{Re}\, p > a$,

(ii) в области $\mathrm{Re}\, p > a$ функция стремится к нулю при $|p| \to +\infty$ равномерно относительно $\arg p$,

(iii) при любом $\xi > a$ сходится интеграл

$$\int\limits_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} |F(p)| d\eta.$$

УПРАЖНЕНИЕ 4.3.1. Показать непустоту множества $\mathcal{L}^{-1}$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.3.2. Пусть функции $F \in \mathcal{L}^{-1}$, $\mathrm{Re}\, p > a$ и $G \in \mathcal{L}^{-1}$, $\mathrm{Re}\, p > b$. Доказать, что функции $F + G$, $F \cdot G \in \mathcal{L}^{-1}$, $\mathrm{Re}\, p > \max\{a, b\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3.1. Из упражнения 4.3.2 вытекает, в частности, что множество $\mathcal{L}^{-1}$ является линейным пространством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3.1. Пусть функция $F \in \mathcal{L}^{-1}$, $\mathrm{Re}\, p > a$. *Обратным преобразованием Лапласа* называется функция

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{A \to \infty} \int\limits_{\xi - iA}^{\xi + iA} e^{pt} F(p) dp \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} e^{pt} F(p) dp, \ \xi > a,$$

$$t \in \mathbf{R}. \qquad (4.3.1)$$

Прежде всего установим корректность определения обратного преобразования Лапласа.

ТЕОРЕМА 4.3.1. *Пусть функция $F \in \mathcal{L}^{-1}$, $\operatorname{Re} p > a$. Тогда интеграл (4.3.1) существует и не зависит от $\xi > 0$.*

$\lhd$ Сначала докажем существование интеграла (4.3.1.). Пусть $\xi > a$, тогда

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} e^{pt}F(p)dp\right| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} |e^{pt}F(p)|d\eta =$$

$$\frac{e^{\xi t}}{2\pi}\int\limits_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} |F(p)|d\eta \le \frac{Me^{\xi t}}{2\pi}.$$

Теперь докажем независимость интеграла (4.3.1) от переменной $\xi > a$. Рассмотрим в области $\operatorname{Re} p > a$ контур γ, состоящий из отрезков прямых $[\xi_1 - iA, \xi_1 + iA]$ и $[\xi_2 - iA, \xi_2 + iA]$, параллельных мнимой оси, и соединяющих их отрезков $[\xi_1 - iA, \xi_2 - iA]$ и $[\xi_1 + iA, \xi_2 + iA]$, параллельных действительной оси. В силу (i) и теоремы Коши имеем

$$0 = \int\limits_{\gamma} e^{pt}F(p)dp = \int\limits_{\xi_2-iA}^{\xi_2+iA} e^{pt}F(p)dp - \int\limits_{\xi_1-iA}^{\xi_1+iA} e^{pt}F(p)dp +$$

$$\int\limits_{\xi_2+iA}^{\xi_1+iA} e^{pt}F(p)dp + \int\limits_{\xi_1-iA}^{\xi_2-iA} e^{pt}F(p)dp.$$

Переходя к пределу при $A \to \infty$ в силу (ii) получим

$$\int\limits_{\xi_2-i\infty}^{\xi_2+i\infty} e^{pt}F(p)dp = \int\limits_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} e^{pt}F(p)dp. \rhd$$

Итак, интеграл (4.3.1.) существует и определяет функцию действительной переменной $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Изучим некоторые свойства этой функции. Для этого условимся связь между функцией

$F \in \mathcal{L}^{-1}$ и ее обратным преобразованием Лапласа f обозначать символом $F(p) \doteqdot f(t)$.

ТЕОРЕМА 4.3.2. *Пусть функция $F \in \mathcal{L}^{-1}$, $\operatorname{Re} p > a$. Тогда*
(i) $\delta(f) = \max\{0, a\}$,
(ii) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$,
где $F(p) \doteqdot f(t)$.

$\lhd$ (i) Действительно,

$$|f(t)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} e^{pt}F(p)dp\right| \le \frac{Me^{\xi t}}{2\pi},\ \forall \xi > a.$$

В силу теоремы 4.3.1 отсюда вытекает $\delta(f) = \max\{0, a\}$.

(ii) Рассмотрим интеграл (4.3.1) при $t < 0$. Для этого выберем в области $\operatorname{Re} p > a$ контур γ, состоящий из прямой $[\xi_0 - iR, \xi_0 + iR]$ и дуги полуокружности $|p - \xi_0| = R$. В силу (i) определения 4.3.1 и теоремы Коши

$$\int\limits_{\gamma} e^{pt}F(p)dp = 0.$$

Покажем, что при $t < 0$

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma'} e^{pt}F(p)dp = 0,$$

где γ' – дуга полуокружности $|p - \xi_0| = R$. Действительно,

$$\left|\int\limits_{\gamma'} e^{pt}F(p)dp\right| \le M_R R\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} |e^{\xi t + i\eta t}|d\varphi = M_R R e^{\xi_0 t}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} |e^{tR\cos\varphi}|d\varphi =$$

$$2M_R R e^{\xi_0 t}\int\limits_{0}^{\pi/2} |e^{tR\sin\psi}|d\psi < 2M_R R e^{\xi_0 t}\int\limits_{0}^{\pi/2} |e^{\frac{2tR}{\pi}\psi}|d\psi =$$

$$\frac{\pi}{t}M_R(1 - e^{tR}) \to 0 \text{ при } R \to \infty.$$

Здесь $M_R = \max\limits_{\gamma'}|F(p)| \to 0$ при $R \to \infty$ в силу (ii) определения 4.3.1. $\rhd$

Теперь установим связь между преобразованием Лапласа и обратным преобразованием Лапласа.

ТЕОРЕМА 4.3.3. *Пусть функция* $F \in \mathcal{L}^{-1}$, $\operatorname{Re} p > a$. *Тогда*

$$F(q) = \int_0^\infty e^{-qt} f(t)dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-qt}dt \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} e^{pt}F(p)dp$$

при любом $q > a$.

$\triangleleft$ Внутренний интеграл не зависит от ξ. Выберем ξ так, чтобы $a < \xi < \operatorname{Re} q$, и изменим порядок интегрирования:

$$\int_0^\infty e^{-qt} f(t)dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} F(p)dp \int_0^\infty e^{-(p-q)t}dt =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} \frac{F(p)}{q-p}dp = F(q). \triangleright$$

ТЕОРЕМА 4.3.4. *Пусть функция* $f \in \mathcal{L}$, *тогда*

$$\frac{1}{2}\left[f(t-0) + f(t+0)\right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} e^{pt}dp \int_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau)d\tau,$$

где $\xi > \delta(f)$.

Доказательство теоремы очень сложно в техническом отношении, поэтому мы ограничимся лишь частным случаем, а именно, рассмотрим случай $a < 0$. Кроме того, нам потребуется один вспомогательный результат, доказательство которого ввиду сложности мы опускаем.

ЛЕММА 4.3.1. *Пусть функция* $f \in \mathcal{L}$, *тогда*

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(\tau) \frac{\sin a\cdot(t-\tau)}{t-\tau} d\tau = \frac{1}{2}\left[f(t-0) + f(t+0)\right].$$

Перейдем к доказательству теоремы 4.3.4. в случае $a < 0$.

$\triangleleft$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} e^{pt}dp \int_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau)d\tau =$$

$$\lim_{a\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-iA}^{\xi+iA} e^{pt}dp \int_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau)d\tau =$$

$$\lim_{a\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-iA}^{\xi+iA} e^{p(t-\tau)}dp \int_0^\infty f(\tau)d\tau =$$

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(\tau)e^{\xi(t-\tau)} \frac{\sin a\cdot(t-\tau)}{t-\tau} d\tau = \frac{1}{2}\left[f(t-0) + f(t+0)\right].$$

Равенство верно в силу произвола в выборе переменной ξ, в частности, можно взять $\xi = 0$.$\triangleright$

4.4. Свойства обратного преобразования Лапласа

ТЕОРЕМА 4.4.1. *Пусть функции* $F_k \in \mathcal{L}^{-1}$, $\operatorname{Re} p > a_k$, $k = 1, 2, ..., n$. *Тогда* $F(p) \doteqdot f(t)$, $\delta(f) = \max\limits_{k=1,2,...,n} \{a_k\}$, *где*

$$F(p) = \sum_{k=1}^n \alpha_k F_k(p), \; f(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(t),$$

$$F_k(p) \doteqdot f_k(t), \; \delta(f_k) = a_k, \alpha_k \in \mathbf{R}, k = 1, 2, ..., n.$$

УПРАЖНЕНИЕ 4.4.1. Доказать теорему 4.4.1.

ТЕОРЕМА 4.4.2. *Пусть функция* $F \in \mathcal{L}^{-1}$, $\operatorname{Re} p > a$. *Тогда* $F'(p) \doteqdot -tf(t)$, *где* $F(p) \doteqdot f(t)$, $\delta(f) = a$.

$\triangleleft$ Действительно,

$$F'(p) = -\int_0^\infty e^{-pt} t f(t)dt \doteqdot -tf(t)$$

в силу равномерной сходимости интеграла.$\triangleright$

ТЕОРЕМА 4.4.3. *Пусть функция* $F \in \mathcal{L}^{-1}$, $\operatorname{Re} p > a$ *и* $F(p) \doteqdot f(t)$, $\delta(f) = a$, *причем* $f(t)/t \in \mathcal{L}$. *Тогда*

$$\int_p^\infty F(q)dq \doteqdot \frac{f(t)}{t}, \ \operatorname{Re} p > a.$$

$\triangleleft$ Положим

$$I(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)dt, \ \operatorname{Re} p > a,$$

где $\varphi(t) = \frac{f(t)}{t}$. Причем в силу упражнения 4.1.3 имеем $I(\infty) = 0$. Поскольку

$$I'(p) = -\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = -F(p),$$

то

$$\int_p^\infty I'(q)dq = I(\infty) - I(p) = -\int_p^\infty F(q)dq.\triangleright$$

ТЕОРЕМА 4.4.4.*Пусть функция* $F \in \mathcal{L}^{-1}$, $\operatorname{Re} p > a$. *Тогда при любом* $\lambda \in \mathbf{C}$ *имеем* $F(p+\lambda) \doteqdot e^{-\lambda t} f(t)$, $\operatorname{Re} p > a - \operatorname{Re} \lambda$, *где* $F(p) \doteqdot f(t)$, $\delta(f) = a$.

$\triangleleft$ Действительно,

$$F(p+\lambda) = \int_0^\infty e^{-(p+\lambda)t} f(t)dt \doteqdot e^{-\lambda t} f(t).\triangleright$$

ТЕОРЕМА 4.4.5. *Пусть функции* $F_k \in \mathcal{L}^{-1}$, $\operatorname{Re} p > a_k$, $k = 1,2$, *причем функция* $f = f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{C}[0, +\infty)$, *где* $F_k(p) \doteqdot f_k(t)$, $k = 1,2$. *Тогда* $F(p) \doteqdot f(t)$, *где*

$$F(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} F_1(q)F_2(p-q)dq = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} F_1(p-q)F_2(q)dq, \tag{4.4.1}$$

причем функция $F \in \mathcal{L}^{-1}$, $\operatorname{Re} p > a_1 + a_2$.

$\triangleleft$ Так как функция $f \in \mathcal{L}$, то

$$f(t) \doteqdot F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f_1(t) f_2(t)dt, \ \operatorname{Re} p > a_1 + a_2. \tag{4.4.2}$$

Поскольку

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} e^{qt} F_2(q)dq, \ \operatorname{Re} q > a_1,$$

то из (4.4.2) вытекает, что

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f_1(t)dt \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} e^{qt} F_2(q)dq =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} F_2(q)dq \int_0^\infty e^{-(p-q)t} f_1(t)dt =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} F_1(p-q)F_2(q)dq, a_2 < \operatorname{Re} q < \operatorname{Re} p - a_1.$$

Второе равенство (4.4.1) доказывается аналогично при $a_1 < \operatorname{Re} q < \operatorname{Re} p - a_2$.$\triangleright$

4.5. Задача Коши для линейного дифференциального уравнения

Рассмотрим задачу Коши

$$y(0) = y_0, \ y'(0) = y_1, \ ..., \ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \tag{4.5.1}$$

для линейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_0 y^{(n)} + a_0 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f. \tag{4.5.2}$$

Здесь коэффициенты $a_k \in \mathbf{R}$ и начальные данные $y_k \in \mathbf{R},\ k = 0, 1, ..., n-1$; свободный член $f = f(t)$ – некоторая заданная функция, причем мы считаем, что $f \in \mathcal{L}$. Как известно, решение задачи (4.5.1), (4.5.2) можно представить как сумму решения однородного (т.е. $f(t) \equiv 0$) уравнения (4.5.2) с начальными данными (4.5.1) и решения неоднородного уравнения (4.5.2) с нулевыми начальными данными.

Начнем с решения первой задачи. Построим фундаментальную систему решений однородного уравнения (4.5.2)

$$a_0\psi_k^{(n)} + a_0\psi_k^{(n-1)} + ... + a_n\psi_k = 0, k = 0, 1, ..., n-1,$$

удовлетворяющую начальным условиям

$$\psi_k^{(l)}(0) = \delta_k^l,\ l, k = 0, 1, ..., n-1,$$

где δ_k^l – символ Кронекера[16]

$$\delta_k^l = \begin{cases} 1,\ l = k, \\ 0, l \neq k. \end{cases}$$

Очевидно, функции $\{\psi_k\}$ образуют фундаментальную систему, т.к. их определитель Вронского[17] при $t = 0$ заведомо отличен от нуля.

Решение $\tilde{y} = \tilde{y}(t)$ задачи (4.5.1), (4.5.2) при $f(t) \equiv 0$ выражается через эти функции следующим образом:

$$\tilde{y}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k\psi_k(t).$$

Для нахождения функций $\psi_k, k = 0, 1, ..., n-1$ применим преобразование Лапласа. Поскольку

$$\psi_k(t) \doteqdot \psi_k(p),\ \psi_k^{(j)}(t) \doteqdot p^j\left[\psi_k(p) - \frac{\varepsilon_k^j}{p^{k+1}}\right]\ j = 1, ..., n,$$

[16]Леопольд Кронекер (1823-1891) – немецкий математик. Основные работы относятся к алгебре и теории элементарных функций.

[17]Юзеф Мария Вронский (1776-1853) – польский математик и философ-мистик.

где

$$\varepsilon_k^j = \begin{cases} 0,\ j \leq k, \\ 1, j > k, \end{cases}$$

то из (4.5.2) имеем

$$\psi_k(p)P_n(p) = P_k(p), \tag{4.5.3}$$

где многочлены $P_n(p)$ и $P_k(p)$ имеют вид

$$P_n(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + ... + a_n,$$

$$P_k(p) = a_0p^{n-(k+1)} + ... + a_{n-(k+1)}.$$

Из (4.5.3) следует, что

$$\psi_k(p) = \frac{P_k(p)}{P_n(p)}. \tag{4.5.4}$$

Найдем обратное преобразование Лапласа функций $\psi_k(p),\ k = 0, 1, ..., n-1$

$$\psi_k(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} e^{pt}\frac{P_k(p)}{P_n(p)}dp,\ x > a,$$

где прямая $x = a$ проходит правее особых точек функции (4.5.4), т.е.

$$\psi_k(t) = \sum_{l=0}^{n-1} \operatorname*{Res}_{p=p_l} e^{pt}\frac{P_k(p)}{P_n(p)},$$

где p_l - полюса функции (4.5.4). Если корни многочлена $P_n(p)$ простые, то $P_n(p) = a_0\prod_{j=0}^{n-1}(p - p_j)$, и значит,

$$\psi_k(t) = \sum_{l=0}^{n-1} a_{kl}e^{p_lt}, \quad a_{kl} = \frac{P_k(p_l)}{a_0\prod_{j\neq l}(p_l - p_j)},\ k = 0, 1, ..., n-1.$$

Если корни кратные, то $P_n(p) = a_0 \prod\limits_{j=0}^{m} (p-p_j)^{\alpha_j}$, $\sum\limits_{j=0}^{m} \alpha_j = n$, α_j – кратность, посему

$$\psi_k(t) = \sum_{j=0}^{m} q_{kj} t e^{p_j t},$$

$$q_{kj} = b_{0,kj} t^{\alpha_j - 1} + b_{1,kj} t^{\alpha_j - 2} + b_{\alpha_{j-1},kj}.$$

Перейдем теперь к решению неоднородной задачи с нулевыми начальными условиями.

$$\bar{y}(t) \doteqdot Y(p),\ f(t) \doteqdot F(p)$$

$$Y(p) = \frac{F(p)}{P_n(p)}.$$

$$\psi_{n-1}(t) \doteqdot \frac{a_0}{P_n(p)} \quad \psi_{n-1}^{(j)}(0) = \delta_{n-1}^{j},\ j = 0, ..., n-1.$$

$$Y(p) \doteqdot \bar{y}(t) = \frac{1}{a_0} \int\limits_0^t \psi_{n-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

Таким образом, окончательно получили решение задачи (4.5.1), (4.5.2):

$$y(t) = \tilde{y}(t) + \bar{y}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \sum_{l=0}^{n-1} \operatorname*{Res}_{p=p_l} e^{pt} \frac{P_k(p)}{P_n(p)} +$$

$$\frac{1}{a_0} \int\limits_0^t \psi_{n-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

Для практического использования данного метода полезно иметь под рукой преобразования Лапласа некоторых элементарных функций. Ранее мы уже получили, что

$$\sigma(t) \doteqdot \frac{1}{p},\ \operatorname{Re} p > 0;\ e^{\alpha t} \doteqdot \frac{1}{p-\alpha} \operatorname{Re} p > \alpha;$$

$$t^{\nu} \doteqdot \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}},\ \operatorname{Re} p > 0; t^n \doteqdot \frac{n!}{p^{n+1}},\ n \in \mathbf{N},\ \operatorname{Re} p > 0.$$

Продолжим построение таблицы преобразований Лапласа.

$$\sin wt = \frac{1}{2i}(e^{iwt} - e^{-iwt}) \doteqdot \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-iw} - \frac{1}{p+iw}\right) =$$

$$\frac{w}{p^2+w^2},\ \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} w|;$$

$$\cos wt = \frac{1}{2}(e^{iwt} + e^{-iwt}) \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-iw} + \frac{1}{p+iw}\right) =$$

$$\frac{p}{p^2+w^2},\ \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} w|;$$

$$\operatorname{sh} \lambda t = \frac{1}{2}(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}) \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\lambda} - \frac{1}{p+\lambda}\right) =$$

$$\frac{\lambda}{p^2-\lambda^2},\ \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda;$$

$$\operatorname{ch} \lambda t = \frac{1}{2}(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}) \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\lambda} + \frac{1}{p+\lambda}\right) =$$

$$\frac{p}{p^2-\lambda^2},\ \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda;$$

$$t^n e^{\alpha t} \doteqdot \int\limits_0^{\infty} t^n e^{-(p-\alpha)t} dt = \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}},\ \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha.$$

УПРАЖНЕНИЕ 4.5.1. Пользуясь свойствами преобразования Лапласа, показать, что

$$t \sin wt \doteqdot \frac{2pw}{(p^2+w^2)^2},\ \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} w|;$$

$$t \cos wt \doteqdot \frac{p^2-w^2}{(p^2+w^2)^2},\ \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} w|;$$

$$e^{\lambda t} \sin wt \doteqdot \frac{w}{(p-\lambda)^2+w^2},\ \operatorname{Re} p > (\operatorname{Re} \lambda + |\operatorname{Im} w|);$$

$$e^{\lambda t} \cos wt \doteqdot \frac{p}{(p-\lambda)^2+w^2},\ \operatorname{Re} p > (\operatorname{Re} \lambda + |\operatorname{Im} w|).$$

4.6. Преобразования Фурье и Меллина

Из теорем 4.3.3 и 4.3.4 следует, что прямое и обратное преобразования Лапласа функции $f \in \mathcal{C}[0, +\infty)$ задаются формулами

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt, \ \mathrm{Re}\, p > \delta(f); \tag{4.6.1}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} e^{pt} F(p)dp, \ \delta(f) > \xi; \tag{4.6.2}$$

соответственно. В обозначениях

$$g(t)f(t)e^{-\xi t}, \quad G(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\xi + i\eta)$$

формулы (4.6.1) и (4.6.2) записываются следующим образом:

$$G(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-i\eta t} g(t)dt, \tag{4.6.3}$$

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{i\eta t} G(\eta)d\eta. \tag{4.6.4}$$

Определенная по формуле (4.6.3) функция $G(\eta)$ носит название *преобразования Фурье* функции $g(t)$. Поскольку $g(t) = 0$ при $-\infty < t < 0$, то в качестве нижнего предела интегрирования в правой части (4.6.3), очевидно, можно брать $- -\infty$. Когда функция $g(t)$ определена всюду при $-\infty < t < \infty$, но она не обязательно равна нулю при $-\infty < t < 0$,*преобразованием Фурье* этой функции называется интеграл

$$G(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-i\eta t} g(t)dt. \tag{4.6.5}$$

ТЕОРЕМА 4.6.1. *Пусть функция $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ удовлетворяет следующим условиям:*

(i) $g \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$,
(ii) функция g имеет конечное множество экстремумов,
(iii) интеграл

$$\int_{-\infty}^\infty g(t)dt$$

сходится абсолютно. Тогда формулы (4.6.5) и (4.6.4) задают прямое и обратное преобразование Фурье соответственно.

Доказательство этого факта хотя и не требует привлечения сложного аппарата, но на нем мы здесь останавливаться не будем.

Преобразованием Меллина функции $f : \{\mathbf{R}\}_+ \to \mathbf{R}$ называется интеграл

$$F(\zeta) = \int_0^\infty t^{\zeta - 1} f(t)dt, \tag{4.6.6}$$

где ζ – комплексная переменная, под $t^{\zeta-1}$ понимается однозначная функция

$$T^{\zeta - 1} = e^{(\zeta - 1)\ln t},$$

а под $\ln t$ – главная ветвь этой функции.

При $\zeta = \sigma - i\tau$ в результате замены переменной $t = e^\xi$ формула (4.6.6) принимает вид

$$F(\sigma - i\tau) = \int_{-\infty}^\infty e^{\sigma\xi - i\tau\xi} f(e^\xi)d\xi. \tag{4.6.7}$$

Если функция $e^{\sigma\xi} f(e^\xi)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.6.1, то из (4.6.7) в силу (4.6.4) получаем

$$e^{\sigma\xi} f(e^\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F(\sigma - i\tau) e^{i\xi\tau} d\tau$$

или, возвращаясь снова к переменной $t = e^\xi$,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F(\sigma - i\tau) t^{-(\sigma - i\tau)} d\tau =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\sigma+i\eta)t^{-(\sigma+i\eta)}d\eta. \tag{4.6.8}$$

Следовательно, преобразование, обратное (4.6.6), задается формулой (4.6.8). Эту формулу записывают в виде

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t^{-\zeta}F(\zeta)d\zeta. \tag{4.6.9}$$

Таким образом, формулы (4.6.6) и(4.6.9) задают прямое и обратное преобразования Меллина соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.6.1. К сожалению, преобразование Фурье теряет смысл для достаточно обширного класса функций. Так, например, даже когда $G(\eta)=const\neq 0$, интеграл в правой части (4.6.4) не сходится. Тем не менее постулируется существование обратного преобразования Фурье от постоянной $G=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, и оно, по определению, дает так называемую δ-функцию Дирака[18]

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\xi}d\xi. \tag{4.6.10}$$

Постулируется также существование преобразования, обратного (4.6.10):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-it\eta}d\eta, \tag{4.6.11}$$

или, что то же самое,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-it\eta}d\eta=1.$$

Предположим, что функция $f(x)$, $-\infty<x<\infty$, удовлетворяет условиям, достаточным для существования взаимно обрат-

[18]Поль Андриен Морис Дирак (1902-1984) – английский физик-теоретик, один из основоположников квантовой механики.

ных преобразований

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-ix\xi}d\xi, \tag{4.6.12}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{ix\xi}d\xi. \tag{4.6.13}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6.1. В силу (4.6.11) - (4.6.13) для свертки $f*\delta$ будем иметь

$$f*\delta=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(x-t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\xi)e^{ix\xi}d\xi=f(x).$$

Таким образом, мы пришли к очень важному выводу о том, что *свертка $f*\delta$ дает значение функции f в точке x*:

$$f*\delta=f(x). \tag{4.6.14}$$

Формула(4.6.14) сильно упрощает громоздкие вычисления, встречающиеся особенно в квантовой механике. В частности, когда $f(x)=1$, $-\infty<x<\infty$, из (4.6.14) в результате простой замены переменной интегрирования получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1. \tag{4.6.15}$$

Иногда δ-функцию Дирака $\delta(t)$ определяют как функцию, равную нулю для всех, отличных от нуля t, и равную ∞ при $t=0$, с требованием, чтобы имело место равенство (4.6.15). Такое определение δ-функции не укладывается в рамки обычных классических понятий математического анализа. Строгое математическое обоснование совершенных выше операций с участием δ-функции Дирака дается в современной теории обобщенных функций.

4.7. Задача Коши для уравнения теплопроводности

Уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.7.1}$$

моделирует распространение тепла в бесконечном однородном стержне. Здесь $u = u(x,t)$ – неизвестная функция, отвечающая температуре стержня в точке $x \in \mathbf{R}$ и в момент времени $t \in \mathbf{R}_+$. Постоянная $a \in \mathbf{R}_+$ называется коэффициентом теплопроводности, и ее значение считается заданным. Простоты ради мы будем полагать коэффициент $a = 1$. Заметим, что такое упрощение не повлияет на общность наших рассуждений.

Итак, речь идет об отыскании функции $u = u(x,t)$, удовлетворяющей в полуплоскости $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4.7.2}$$

а на границе полуплоскости – *начальному условию (условию Коши)*

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in \mathbf{R}. \tag{4.7.3}$$

Функция $\varphi = \varphi(x)$ называется начальным условием потому, что задает распределение температуры в начальный момент времени $(t = 0)$. Для решения задачи (4.7.2), (4.7.3) мы применим преобразование Фурье.

Предположим, что функции u и φ таковы, что существуют интегралы

$$U(t,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\xi x}dx, \tag{4.7.4}$$

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-i\xi x}dx, \tag{4.7.5}$$

и законны операции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}e^{-i\xi x}dx = \frac{\partial U(t,\xi)}{\partial t}, \tag{4.7.6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}e^{-i\xi x}dx =$$

$$-\frac{\xi^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\xi x}dx = -\xi^2(t,\xi). \tag{4.7.7}$$

Умножая уравнение (4.7.2) на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\xi x}$ и интегрируя по x от $-\infty$ до ∞, в силу (4.7.4) – (4.7.7), будем иметь

$$\frac{dU}{dt} + \xi^2 U = 0, \tag{4.7.8}$$

$$U(0,\xi) = \Phi(\xi). \tag{4.7.9}$$

Записывая уравнение (4.7.8) в виде

$$\frac{dU}{dU} = -\xi^2 dt$$

и интегрируя, сразу получаем его общее решение

$$U(t,\xi) = ce^{-\xi^2 t}, \tag{4.7.10}$$

где c – произвольная функция от ξ. Подставляя выражение (4.7.10) для $U(t,\xi)$ в (4.7.9), находим $c = \Phi(\xi)$. Следовательно, решением обыкновенного дифференциального уравнения (4.7.8), удовлетворяющим условию (4.7.9), является функция

$$U(t,\xi) = \Phi(\xi)e^{-\xi^2 t}.$$

После того как функция $U(t,\xi)$ найдена, формулу (4.7.4) можно записать в виде

$$\Phi(\xi)e^{-\xi^2 t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\xi x}dx, \tag{4.7.11}$$

Обращая (4.7.11) по формуле (4.6.4), будем иметь

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi)e^{-\xi^2 t + i\xi x}d\xi. \tag{4.7.12}$$

Из таблицы преобразований Лапласа находим, что при $t \in \mathbf{R}_+$ преобразованием Фурье функции $e^{-\xi^2 t}$ относительно переменной ξ является функция

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Применяя формулы для свертки $f * \varphi$ из (4.7.12), получаем

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) e^{-\xi^2 t + i\xi x} d\xi =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) f(x-\xi, t) d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi.$$

5. МЕРА ЛЕБЕГА [19]

...А только как ты думаешь, Том, вдова
не отберет у нас клада? Ведь это ее земля.
– Отобрать у нас клад! Пусть попробует!
Нет уж, клад такое дело: кто его
нашел, тот и бери. А в чьей он земле,
все равно.

Марк Твен. Приключения Тома Сойера

5.1. Основные понятия теории множеств

Напомним, что понятия *множества* и *отображения* множеств мы считаем неопределяемыми, т.е. не подлежащими логическому анализу. Множество X считается заданным, если известны его элементы, т.е. для любого элемента x выполнено $x \in X$ или $x \notin X$.

Если A и B – множества, то множество A называется *подмножеством* множества B (обозначается $A \subset B$), если каждый элемент множества A является элементом множества B. Множество всех подмножеств множества X обозначается $\mathcal{P}(X)$. Множество, состоящее из одного элемента, обозначается $\{x\}$. Множество, не содержащее элементов, называется *пустым* и обозначается $\emptyset$. Для любого множества X выполнено $\emptyset \subset X$. Множество всех множеств некоторой данной математической теории называется *универсумом* и обозначается символом U. Другими словами, мы считаем, что для любого множества выполнено соотношение $X \subset U$.

Пусть A и I – множества. Отображение $f : I \to \mathcal{P}(A)$ называется *семейством* множеств, если оно записывается в виде $\{A_i\}_{i \in I}$, где $A_i \in \mathcal{P}(A)$. Множество I в этом случае называется *множеством индексов*. Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ – некоторое семейство

[19] Анри Леон Лебег (1875-1941) – французский математик. Основные работы относятся к теории функций и теории интегрирования.

множеств. *Пересечением* множеств этого семейства называется множество

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{a : a \in A_i \forall i \in I\},$$

а *объединением* – множество

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{a : a \in A_i \exists i \in I\}.$$

В дальнейшем нам потребуется *дизъюнктное объединение* множеств семейства $\{A_i\}_{i\in I}$

$$\bigsqcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} A_i, \text{ если } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ при } i \neq j.$$

Кроме того, наряду с операцией *разности* двух множеств A и B

$$A \setminus B = \{a \in A : a \notin B\}$$

нам потребуется операция *симметричной разности*

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.1.1. Показать, что
(i) $A\triangle B = B\triangle A$;
(ii) $A \setminus B = A \cap (A\triangle B)$;
(iii) $A \cup B = (A \cap B)\triangle(a\triangle B)$;
(iv) $A\triangle B = (X \setminus A)\triangle(X \setminus B)\ \forall X \subset U$;
(v) $A \cap (B\triangle C) = (A \cap B)\triangle(A \cup C)$.

Декартовым[20] *произведением* двух множеств X и Y называется множество

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}.$$

Декартовым произведением семейства множеств $\{X_i\}_{i\in I}$ называется множество $\prod_{i\in I} X_i$, элементами которого являются отображения, определенные на множестве I и такие, что $f(i) \in X_i$.

[20]Рене Декарт (1596 – 1650) – французский философ, математик, физик. Основоположник аналитической геометрии.

Утверждение, что произведение $\prod_{i\in I} X_i$ не является пустым, принимается в теории множеств в качестве аксиомы.

Аксиома выбора (аксиома Цермело[21]). *Для всякого семейства* $\{X_i\}_{i\in I}$ *непустых множеств существует отображение* f *такое, что* $f(i) \in X_i$ *для любого* $i \in I$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.1. *Отношением* между множествами X и Y называется любое подмножество $\mathcal{R}$ из декартова произведения $X \times Y$. Если $X = Y$, то отношение $\mathcal{R}$ называется отношением на множестве X.

В качестве примеров отношений на множестве $\mathbf{R}$ можно взять следующие множества $\{(x, y : x \le y\}$, $\{(x, y) : y = \sin x\}$, $\{(x, y) : x - y \in \mathbf{Z}\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.2. Отношение $\mathcal{R}$ на множестве X называется *рефлексивным*, если $(x, x) \in \mathcal{R}$ для всех $x \in X$; *симметричным*, если из $(x, y) \in \mathcal{R}$ следует $(y, x) \in \mathcal{R}$; *транзитивным*, если из $(x, y) \in \mathcal{R}$ и $(y, z) \in \mathcal{R}$ следует $(x, z) \in \mathcal{R}$. Отношение называют *антисимметричным*, если из $(x, y) \in \mathcal{R}$ и $(y, x) \in \mathcal{R}$ следует $x = y$.

В дальнейшем нам потребуются два отношения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.3. Отношение $\mathcal{R} \subset X \times X$ называется отношением *эквивалентности* на множестве X, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Обычно условие $(x, y) \in \mathcal{R}$ в случае отношения эквивалентности записывается в виде $x \sim y$ или $x \overset{\mathcal{R}}{\sim} y$. Если на множестве X задано отношение эквивалентности, то множество X разбивается на непересекающиеся *классы* эквивалентных между собой элементов. Класс, содержащий элемент x, обозначаем $[x]$.

ПРИМЕР 5.1.1. Пусть $X = \mathbf{Z}$. Введем отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $x - y = 3k,\ k \in \mathbf{Z}$. Множество $\mathbf{Z}$ распадается на три класса: $[0] = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$; $[1] = \{..., -5, -2, 1, 4, 7, ...\}$; $[2] = \{..., -7, -4, -1, 2, 5, ...\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.4. Отношение $\mathcal{R}$ на множестве X называется отношением *порядка*, если оно транзитивно, рефлексивно и антисимметрично. Обычно условие $(x, y) \in \mathcal{R}$ в случае отношения порядка записывают в виде $x \prec y$ и читают "x пред-

[21]Эрнст Цермело (1871-1953) – немецкий математик. Основные исследования относятся к теории множеств.

шествует y"или "y следует за x". Непустое множество X с заданным на нем отношением порядка называется упорядоченным множеством и обозначается символом $(X;\prec)$.

ПРИМЕР 5.1.2. Пусть $X = \mathbf{R}$. Отношение $\mathcal{R} : (x,y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x \le y$ обладает следующими свойствами:

$x \le y, y \le z \Rightarrow x \le z$ (транзитивность);

$x \le x$ (рефлексивность);

$x \le y, y \le x \Rightarrow x = y$ (антисимметричность).

ПРИМЕР 5.1.3. Пусть X – произвольное множество. На множестве $\mathcal{P}(X)$ зададим отношение $\mathcal{R} : (A,B) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow A \subset B$. Очевидным образом проверяются следующие соотношения:

$A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$;

$A \subset A$;

$A \subset B, B \subset A \Rightarrow A = B$.

Значит, отношение $A \subset B$ задает на множестве $\mathcal{P}(X)$ отношение порядка и говорят, что множество $\mathcal{P}(X)$ упорядочено по включению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.5. Пусть $(X;\prec)$ – упорядоченное множество. Подмножество $A \subset X$ называется *линейно упорядоченным*, если для любых двух элементов x_1 и x_2 из A выполнено либо $x_1 \prec x_2$ либо $x_2 \prec x_1$. Подмножество $A \subset X$ называется *ограниченным сверху*, если существует элемент $x_0 \in X$ такой, что для любого $x \in A$ выполнено $x \prec x_0$. Такой элемент x_0 называется мажорантой множества A. Элемент $m \in X$ называется максимальным, если из того, что $m \prec x$ следует, что $m = x$.

ЛЕММА ЦОРНА. *Если в упорядоченном множестве $(X;\prec)$ всякое линейно упорядоченное подмножество ограничено сверху, то в X существует хотя бы один максимальный элемент.*

Эта лемма доказывается на основании аксиомы выбора.

Напомним, что *графиком* отображения $f : X \to Y$ называется множество

$$graph f = \{(x, f(x)) : x \in X, F(x) \in Y\}.$$

График $graph f$ есть отношение между множествами X и Y.

УПРАЖНЕНИЕ 5.1.2. Сформулировать необходимые и достаточные условия на отношение $\mathcal{R}$, при выполнении которых оно является графиком некоторого отображения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.6. Отображение $f : X \to Y$ называется

(i) *инъективным*, если из того, что $f(x_1) = f(x_2)$, следует $x_1 = x_2$.

(ii) *сюръективным*, если для любого $y \in Y$ существует $x \in X$ такой, что $f(x) = y$.

(iii) *биективным*, если оно инъективно и сюръективно.

Если заданы два отображения $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, то их *композицией* называется отображение $g \circ f : X \to Z$ такое, что $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Отображение $f : X \to Y$ инъективно (сюръективно) точно тогда, когда существует отображение $g : Y \to X (h : Y \to X)$ такое, что $g \circ f = I_X (f \circ h = I_Y)$. Здесь I_X, I_Y – тождественное отображение в X и Y. Отображения g и h называют соответственно *левым обратным* и *правым обратным* для f. Если f биективно, то $g = h$, его называют *обратным* отображением для f и обозначают f^{-1}.

УПРАЖНЕНИЕ 5.1.3. Доказать, что композиция биективных отображений является биективным отображением. Отображение, обратное для биективного отображения, также биективно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.7. Два множества X и Y называются *равномощными*, если существует биективное отображение $f : X \to Y$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.1.4. Доказать, что отношение равномощности на множестве $\mathcal{P}(X)$ является отношением эквивалентности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.8. Множество X называется *счетным*, если оно равномощно множеству $\mathbf{N}$ натуральных чисел.

Проверка счетности конкретных множеств основана обычно на том, что объединение счетного множества счетных множеств является счетным множеством и произведение конечного числа счетных множеств счетно. Заметим, что произведение счетного множества счетных множеств несчетно и произведение счетного множества конечных множеств, каждое из которых содержит хотя бы две различные точки, также несчетно.

УПРАЖНЕНИЕ 5.1.5. Доказать, что

(i) множества $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ счетны;

(ii) множество многочленов с рациональными коэффициентами счетно;

(ii) множества **R** и **C** несчетны и равномощны между собой. Их мощность называется *мощностью континуума.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.9. Пусть $X \subset U$ – непустое множество. *Топологией* на множестве X называется множество τ подмножеств множества X ($\tau \subset \mathcal{P}(X)$), удовлетворяющее следующим условиям (*аксиомам топологии*):

(i) объединение любого множества элементов из τ принадлежит $\tau : U_\alpha \in \tau \Rightarrow \bigcup\limits_\alpha U_\alpha \in \tau$;

(ii) пересечение любых двух множеств из τ принадлежит τ;

(iii) $X \in \tau$, $\emptyset \in \tau$.

Элементы из τ называют *открытыми множествами* в топологии τ, а их дополнения – *замкнутыми множествами. Топологическим пространством* называется множество X с заданной на нем топологией, т.е. пара (X, τ).

ПРИМЕР 5.1.4. Пусть X – произвольное множество. На множестве X всегда можно построить две топологии: – $\tau_{min} = \{\emptyset, X\}$, которая называется *тривиальной топологией*, и $\tau_{max} = \mathcal{P}(X)$, которая называется *дискретной топологией.*

УПРАЖНЕНИЕ 5.1.6. Найти все топологии на множестве X, состоящем из двух точек, т.е. $X = \{a, b\}$.

В естественной топологии на вещественной прямой множество A является открытым, если каждая точка входит в A вместе с некоторым содержащим ее интервалом. Каждое открытое множество на прямой может быть представлено в виде $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)$ – конечного или счетного объединения непересекающихся интервалов, включая полупрямые $(-\infty, a)$ и $(a, +\infty)$.

5.2. Кольца и полукольца множеств

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2.1. Пусть $X \subset U$ – непустое множество. Непустое множество $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ называется *кольцом*, если оно замкнуто относительно операций пересечения и симметрической разности, т.е. из выполнения условий $A \in \mathcal{K}$ и $B \in \mathcal{K}$ следует, что $A \cap B \in \mathcal{K}$ и $A \triangle B \in \mathcal{K}$.

Кольцо $\mathcal{K}$ называется *алгеброй*, если $X \in \mathcal{K}$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.2.1. Доказать, что если $\mathcal{K}$ кольцо, то для любых $A, B \in \mathcal{K}$ выполнено $A \setminus B \in \mathcal{K}$ и $A \cup B \in \mathcal{K}$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.2.2. Показать, что

(i) $\mathcal{P}(X)$ есть кольцо и алгебра;

(ii)$\mathcal{K}(X) = \{\emptyset, X\}$ – кольцо и алгебра;

(iii) естественная топология на множестве **R** является кольцом;

(iv) $\mathcal{K}_k$, состоящее из всех конечных подмножеств множества **R**, – кольцо, но не алгебра;

(v) $\mathcal{K}_o$, состоящее из всех ограниченных подмножеств множества **R** и пустого множества, – кольцо, но не алгебра;

(vi) $\mathcal{K}_c$, состоящее из всех конечных и счетных подмножеств множества **R**, – кольцо, но не алгебра.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2.2. Кольцо $\mathcal{K}$ называется *σ-кольцом*, если объединение счетного числа множеств из $\mathcal{K}$ принадлежит $\mathcal{K}$, т.е. если $A_i \in \mathcal{K}$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{K}$. Кольцо $\mathcal{K}$ называется *δ-кольцом*, если пересечение счетного числа множеств из $\mathcal{K}$ принадлежит $\mathcal{K}$, т.е. если $A_i \in \mathcal{K}$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{K}$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.2.3. Показать, что

(i) $\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{K}_c$ являются и σ-кольцами, и δ-кольцами;

(ii) $\mathcal{K}_k$ и $\mathcal{K}_o$ не являются σ-кольцами, но являются δ-кольцами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2.3. Пусть $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ – некоторое непустое множество. Кольцо $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ называется кольцом, *порожденным множеством* $\mathcal{S}$, если

(i) $\mathcal{S} \subset \mathcal{K}(\mathcal{S})$,

(ii) $\mathcal{K}'$ – другое кольцо, содержащее множество $\mathcal{S}$, то $\mathcal{K}' \supset \mathcal{K}(\mathcal{S})$.

ТЕОРЕМА 5.2.1. *Пусть $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ – некоторое непустое множество. Тогда существует $\mathcal{K}(\mathcal{S})$.*

$\triangleleft$ Пусть $\Sigma = \{\mathcal{K} : S \subset \mathcal{K}\}$ – множество всех колец, содержащих $\mathcal{S}$. Так как всегда $\mathcal{P}(X) \in \Sigma$, то $\Sigma \neq \emptyset$. Положим $\mathcal{K}(\mathcal{S}) = \bigcap\limits_{\mathcal{K} \in \Sigma} \mathcal{K}$. Проверим, что $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ – кольцо. Если $A \in \mathcal{K}(\mathcal{S})$ и $B \in \mathcal{K}(\mathcal{S})$, то $A \in \mathcal{K}$ и $B \in \mathcal{K}$ для любого $\mathcal{K} \in \Sigma$. Так как $\mathcal{K}$ – кольцо, то $A \cap B \in \mathcal{K}$ и $A \triangle B \in \mathcal{K}$ для всех $\mathcal{K} \in \Sigma$ и, значит, $A \cap B \in \mathcal{K}(\mathcal{S})$

и $A\triangle B \in \mathcal{K}(\mathcal{S})$. По построению $\mathcal{K}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{K}$ для любых $\mathcal{K} \in \Sigma$, т.е. $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ – искомое кольцо.$\triangleright$

Явное построение кольца $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ по семейству $\mathcal{S}$ может оказаться довольно сложной задачей. Поэтому выделяют наборы подмножеств $\mathcal{S}$, для которых кольца $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ строятся наиболее просто.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2.4. Непустое множество $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ называется *полукольцом*, если для любых множеств $A, B \in \mathcal{S}$ справедливо

$(i) A \cap B \in \mathcal{S}$;

(ii) в случае $A \subset B$ существует конечное множество $\{A_k : k = 1, 2, ..., n\} \subset \mathcal{S}$ такое, что

$$B \setminus A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k.$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.2.4. Показать, что множество промежутков вида $[a, b)$ на прямой $\mathbf{R}$ образует полукольцо, но не кольцо.

ЛЕММА 5.2.1. *Пусть $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ – полукольцо. Если $B = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} B_k$ и $B_k \in \mathcal{S}$, $A \in \mathcal{S}$, то*

$$A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i,$$

где $A_i \in \mathcal{S}$.

$\triangleleft$ Доказательство проводим индукцией по n. При $n = 1$ утверждение совпадает с аксиомой (ii) полукольца, т.е. при $n = 1$ соотношение справедливо. Пусть утверждение верно при $n = l-1$, тогда $A \subset \bigsqcup\limits_{i=1}^{l-1} B_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} A_j$. Отсюда $(A \subset \bigsqcup\limits_{i=1}^{l-1} B_i) \setminus B_l = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} (A_j \setminus B_l) = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} \bigsqcup\limits_{k} A_{jk}$, где $A_{jk} \in \mathcal{S}$.$\triangleright$

ТЕОРЕМА 5.2.2. *Пусть $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ – полукольцо. Тогда* $\mathcal{K}(\mathcal{S}) = \{A : A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k,\ A_k \in \mathcal{S}\}$.

$\triangleleft$ Положим $\mathcal{K}_o(\mathcal{S}) = \{A : A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k,\ A_k \in \mathcal{S}\}$. Очевидно, $\mathcal{K}_o(\mathcal{S}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{S})$. Для доказательства равенства $\mathcal{K}(\mathcal{S}) = \mathcal{K}_o(\mathcal{S})$

достаточно показать, что $\mathcal{K}_o(\mathcal{S})$ само является кольцом. Пусть $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{K}_o\mathcal{S}\}$, $B = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} B_j \in \mathcal{K}_o\mathcal{S}\}$. Тогда, согласно лемме, получаем $A_i \setminus B = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n_i} A_{ik}$, где $A_{ik} \in \mathcal{S}$. Отсюда $A \setminus B = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} \bigsqcup\limits_{k=1}^{n_i} A_{ik} \in \mathcal{K}_o\mathcal{S}$. Далее $A \cup B = (A \setminus B) \bigsqcup B = \bigsqcup \bigsqcup A_{ij} \bigsqcup B_j \in \mathcal{K}_o\mathcal{S}$. Поскольку $A\triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, то $A\triangle B \in \mathcal{K}_o\mathcal{S}$. Так как $A \cap B = (A \cup B) \setminus (B\triangle A)$, то и $A \cap B \in \mathcal{K}_o\mathcal{S}$.$\triangleright$

ПРИМЕР 5.2.1. Пусть $\mathcal{S}$ – полукольцо, порожденное полуинтервалами вида $[\alpha, \beta)$, принадлежащими полуинтервалу $[a, b)$. Кольцо $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ состоит из множеств, являющихся конечными объединениями непересекающихся интервалов из $\mathcal{S}$, причем $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ – алгебра.

Минимальная σ-алгебра, порожденная данным набором $\mathcal{S}$ подмножеств, не допускает такого простого описания. Например, возьмем в качестве $\mathcal{S}$ топологию на $\mathbf{R}$, т.е. совокупность открытых множеств. В σ-алгебру, порожденную топологией, входят замкнутые множества, множества типа G_δ – счетные пересечения открытых множеств, множеств типа $G_{\delta\sigma}$ – счетные объединения множеств типа G_δ и т.д. Порожденная топологией σ-алгебра называется *борелевской*, а ее элементы – *борелевскими*[22] *множествами.*

5.3. Определение и свойства меры

Пусть X – множество, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ – некоторое полукольцо его подмножеств. Напомним, что элементами $\mathcal{S}$ являются подмножества из X. Запись $A \in \mathcal{S}$ означает, что A есть подмножество X, входящее в полукольцо $\mathcal{S}$. Запись $B \subset \mathcal{S}$ означает, B – некоторый набор подмножеств из X, входящих в полукольцо $\mathcal{S}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3.1. Пусть $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ – некоторое множество. Отображение $\mu : \mathcal{S} \to \mathbf{R}$ называется *мерой*, если

(i) $\mu(A) \geq 0$ для любого множества $A \in \mathcal{S}$;

(ii)$\mu(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ для любого множества $A \in \mathcal{S}$ такого, что

[22] Эмиль Борель (1871-1956) – французский математик. Работы относятся к теории функций, теории вероятностей, теории чисел, математическому анализу и математической физике.

$A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k,\ A_k \in \mathcal{S}.$

Мера $\mu : \mathcal{S} \to \mathbf{R}$ называется *σ-аддитивной (счетно-аддитивной)*, если

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

для любого множества $A \in \mathcal{S}$ такого, что $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k,\ A_k \in \mathcal{S}.$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3.1. Мера обычно определяется на полукольце, ибо в произвольном наборе $\mathcal{S}$ множеств может оказаться, что ни одно множество из $\mathcal{S}$ нельзя представить в виде объединения непересекающихся множеств из $\mathcal{S}$ (например, $\mathcal{S}$ – множество отрезков на $\mathbf{R}$).

УПРАЖНЕНИЕ 5.3.1. Пусть $\mathcal{S}$ – полукольцо, состоящее из полуинтервалов вида $[a,b)$. Показать, что *длина* $\mu([a,b)) = b-a$ является мерой на $\mathcal{S}$.

Аксиомы (i) и (ii) в определении 5.3.1 носят название *неотрицательности* и *аддитивности* меры μ. Из этих аксиом вытекает свойство, которое называется *монотонностью* меры μ.

ТЕОРЕМА 5.3.1. *Пусть $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ – полукольцо множеств и μ – мера на нем. Тогда если $A, B \in \mathcal{S}$ и $A \subset B$, то $\mu(A) \le \mu(B)$.*

◁ Согласно определению полукольца существуют элементы $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{S}$ такие, что $B \setminus A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. Тогда $B = A \bigsqcup (\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k)$ и $\mu(B) = \mu(A) + \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k) \ge \mu(A)$.▷

В дальнейшем нас будут интересовать только σ-аддитивные меры.

ТЕОРЕМА 5.3.2. *Длина является σ-аддитивной мерой на полукольце $\mathcal{S}$, состоящем из полуинтервалов вида $[a,b)$.*

◁ Нужно доказать, что если $A = [a,b),\ A_k = [a_k, b_k)$ и $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, то $\mu(A) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$, т.е.

$$b - a = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k). \tag{5.3.1}$$

Так как $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k \subset [a,b)$ для любого n, то в силу теоремы 5.3.1 $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k) \le b-a$. Следовательно, ряд, стоящий в правой части (5.3.1), сходится и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \le b-a$.

Докажем обратное неравенство: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \ge b-a$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и по каждому из полуинтервалов $[a_k, b_k)$ построим содержащий его открытый интервал $B_k = (a_k - \varepsilon/2^{k+1}, b_k)$. Вместо полуинтервала $[a,b)$ возьмем содержащийся в нем отрезок $B = [a, b - \frac{\varepsilon}{2})$. Тогда $B \subset A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, т.е. отрезок B покрыт системой открытых интервалов B_k. Согласно лемме Бореля о покрытии, из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие, т.е. существует такое n, что $B \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Тогда $\mu(B) \le \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(B_k)$, т.е.

$$b - \frac{\varepsilon}{2} - a \le \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}) \le$$

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее получаем

$$b - a \le \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) + \varepsilon \le \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε имеем $b - a \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.▷

ПРИМЕР 5.3.1. Пусть $x = \mathbf{Q} \cap [0,1)$ – рациональный полуинтервал, $\mathcal{S}$ – полукольцо множеств $A = \mathbf{Q} \cap [a,b),\ A \subset X$. Определим $\mu(A) = b-a$. Нетрудно видеть, что μ – мера. Если бы μ была σ-аддитивной, то мы имели бы $\mu(\{r_k\}) = 0$ для любой точки $r_k \in X$. Но, с другой стороны, $X = \bigsqcup\limits_{r_k \in X} \{r_k\}$ и $\mu(X) = 1$. В силу σ-аддитивности мы имели бы $1 = \mu(X) = \sum\limits_{r_k \in X} \mu(\{r_k\}) = 0$. Таким образом, μ не является σ-аддитивной мерой.

В дальнейшем мы покажем, как строить продолжение меры с полукольца $\mathcal{S}$ на кольцо $\mathcal{K}(\mathcal{S})$. А сейчас установим свойство *непрерывности* меры μ, заданной на кольце $\mathcal{K}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3.2. Мера μ на кольце $\mathcal{K}$ называется *непрерывной*, если для любых множеств $A, A_k \in \mathcal{K}$ таких, что $A_k \subset A_{k+1}$, $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, справедливо равенство $\mu(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k)$.

ТЕОРЕМА 5.3.3. *Мера μ на кольце $\mathcal{K}$ является σ-аддитивной точно тогда, когда она непрерывна.*

$\triangleleft$ Пусть мера μ σ-аддитивна и $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{K}$, где $A_k \in \mathcal{K}$ такие, что $A_k \subset A_{k+1}$. Тогда $A = A_1 \bigsqcup (A_2 \subset A_1) \bigsqcup (A_3 \subset A_2) \bigsqcup \ldots$ и

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \sum_{k=2}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1}) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Обратно, пусть мера μ непрерывна и пусть $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k,\ B_k \in \mathcal{K}$. Положим $A_n = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} B_k$. Тогда $A_n \in \mathcal{K},\ A_n \subset A_{n+1},\ A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ и в силу свойства непрерывности

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k). \triangleright$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3.2. С помощью перехода к дополнениям легко проверить, что свойство непрерывности меры μ эквивалентно следующему: для любых множеств $A, A_k \in \mathcal{K}$ таких, что $A_k \supset A_{k+1}$ и $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, справедливо равенство $\mu(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k)$.

5.4. Продолжение меры с полукольца на кольцо множеств

Основная задача заключается в том, чтобы научиться строить продолжение меры с полуколец на другие множества. Первый шаг – продолжение меры с полукольца на кольцо множеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.4.1. Пусть m – мера, заданная на полукольце $\mathcal{S}$. Мера μ, заданная на кольце $\mathcal{K}$, называется *продолжением меры* m, если

(i) $\mathcal{S} \subset \mathcal{K}$;

(ii) $\mu(A) = m(A)$ для любых $A \in \mathcal{S}$.

ТЕОРЕМА 5.4.1. *Пусть m – мера на полукольце $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ – кольцо, порожденное $\mathcal{S}$. Тогда на $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ существует, и притом единственная, мера μ, являющаяся продолжением меры m. Если σ-аддитивна мера m, то σ-аддитивна и мера μ.*

$\triangleleft$ *Единственность.* По теореме 5.2.2 любое множество $A \in \mathcal{K}(\mathcal{S})$ представляется в виде $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n(A)} A_k$, где $A_k \in \mathcal{S}$. Если на $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ есть продолжение μ меры m, то $\mu(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} m(A_k) =$, т.е. мера m однозначно определяет меру μ.

Для доказательства *существования* проверим, что формула $\mu(A) = \sum\limits_{k=1}^{n(A)} m(A_k)$, где $A_k \in \mathcal{S},\ A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n(A)} A_k$, действительно задает продолжение меры m.

Покажем сначала, что если $A = \bigsqcup\limits_{j=1}^{p} B_j,\ B_j \in \mathcal{S}$, то $\sum\limits_{k=1}^{n} m(A_k) = \sum\limits_{j=1}^{p} m(B_j)$, т.е. $\mu(A)$ не зависит от способа разбиения. Пусть $C_{kj} = A_k \cap B_j$. Так как $\mathcal{S}$ – полукольцо, то $C_{kj} \in \mathcal{S}$. Тогда

$$A_k = \bigsqcup_{j=1}^{p} C_{kj},\ B_j = \bigsqcup_{k=1}^{n} C_{kj},\ m(A_k) = \sum_{j=1}^{p} m(C_{kj}),$$

$$m(B_j) = \sum_{k=1}^{n} m(C_{kj}),\ \sum_{k=1}^{n} m(A_k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} m(C_{kj}) = \sum_{j=1}^{p} m(B_j).$$

Положительность меры μ очевидна. Проверим ее аддитивность. Пусть $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, где $A_k \in \mathcal{K}(\mathcal{S})$. Тогда $A_k = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n(A_k)} B_{ki}$, где $B_{ki} \in \mathcal{S}$ и $\mu(A_k) = \sum\limits_{i=1}^{n(A_k)} m(B_{ki})$. Отсюда будем иметь $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{i=1}^{n(A_k)} B_{ki}$, и $\mu(A) = \sum\limits_{k}\sum\limits_{i} \mu(B_{ki}) = \sum\limits_{k} \mu(A_k)$.

Пусть $A \in \mathcal{K}(\mathcal{S})$, $B_n \in \mathcal{K}(\mathcal{S})$ и $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда $A = \bigsqcup\limits_{j=1}^{n(A)} A_j$, $A_j \in \mathcal{S}$, и $B_n = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n(B_n)} B_{ni}$, $B_{ni} \in \mathcal{S}$. Положим $C_{nij} = A_j \cap B_{ni} \in \mathcal{S}$. Отсюда $A_j = A_j \cap A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigsqcup\limits_{i} C_{nij}$ и $B_{ni} = B_{ni} \cap A = \bigsqcup\limits_{j} C_{nij}$. В силу σ-аддитивности меры m имеем $m(A_j) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{i} m(C_{nij})$, $m(B_{ni}) = \sum\limits_{j} m(C_{nij})$. Отсюда получаем

$$\mu(A) = \sum_j m(A_j) = \sum_j \sum_{n=1}^{\infty} \sum_i m(C_{nij}),\ \mu(B_n) = \sum_i \sum_j m(C_{nij}).$$

Следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \sum\limits_n \sum\limits_i \sum\limits_j m(C_{nij}) = \mu(A)$.$\triangleright$

ТЕОРЕМА 5.4.2. *Пусть $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ – кольцо множеств, μ – σ-аддитивная мера на $\mathcal{K}$ и $A, A_k \in \mathcal{K}, k = 1, 2, \ldots$. Тогда*

(i) если $\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \subset A$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \le \mu(A)$;

(ii) если $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \supset A$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \ge \mu(A)$.

$\triangleleft$ (i) Если $B \subset A,\ A, B \in \mathcal{K}$, то $\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B) \ge \mu(B)$. Поэтому из включения $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k \subset A$ следует, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k) \le \mu(A)$. Значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ сходится и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \le \mu(A)$. Отметим, что при доказательстве (i) использована только аддитивность меры μ.

(ii) Введем множества $B_n = (A \cap A_n) \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k \in \mathcal{K}$. Тогда $B_n \subset A_n$ и $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Отсюда $\mu(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.$\triangleright$

Доказанная теорема позволяет выделить класс множеств, меру которых естественно считать равной нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.4.2. Пусть $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ – кольцо и пусть μ – σ-аддитивная мера на этом кольце. Множество $A \subset X$ называется *множеством меры нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует

конечный или счетный набор $A_k \in \mathcal{K}$ такой, что $A \subset \bigcup\limits_k A_k$ и $\sum\limits_k \mu(A_k) < \varepsilon$.

В силу теоремы 5.4.2 множество $A \in \mathcal{K}$ является множеством меры нуль точно тогда, когда $\mu(A) = 0$. Заметим еще, что множества меры нуль необязательно должны принадлежать кольцу $\mathcal{K}$.

ПРИМЕР 5.4.1. Пусть мера μ задана как длина на полукольце, состоящем из полуинтервалов на прямой $\mathbf{R}$. Тогда любое одноточечное множество на $\mathbf{R}$ имеет меру нуль.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4.1. Счетное объединение множеств меры нуль имеет меру нуль. Действительно, пусть A_k – множества меры нуль и $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Для числа $\varepsilon > 0$ выберем множества $A_{ki} \in \mathcal{K}$ так, что $A_k \subset \bigcup\limits_i A_{ki}$ и $\sum\limits_i \mu(A_{ki}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Тогда $A \subset \bigcup\limits_{k,i} A_{ki}$ и $\sum\limits_{k,i} \mu(A_{ki}) < \varepsilon$.

Из примера 5.4.1 и замечания 5.4.1 непосредственно вытекает, что мера множества $\mathbf{Q}$ равна нулю. Однако существуют и несчетные множества, мера которых равна нулю.

ПРИМЕР 5.4.2. *Канторово* [23] *множество.* Возьмем отрезок $[0, 1]$ и построим множество $K \subset [0, 1]$ следующим образом. Разделим отрезок $[0, 1]$ на три равные части и выбросим интервал $G_1 = (1/3, 2/3)$. Получим множество $F_1 = [0, 1 \setminus G_1$. Каждый из оставшихся отрезков $[0, 1/3]$ и $[2/3, 1]$ множества F_1 делим на три равные части и из каждого выбрасываем средний интервал, т.е. множество $G_2 = (2/3 + 1/9, 2/3 + 2/9) \cup (1/9, 2/9)$. Получим множество $F_2 = F_1 \setminus G_2$. Для построения множества F_n каждый из 2^{n-1} отрезков, составляющих множество F_{n-1}, делим на 3 равные части и средний интервал, имеющий длину 3^{-n}, выбрасываем. Выброшенное множество обозначим через G_n, и тогда $F_n = F_{n-1} \setminus G_n$. Множество $K = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ и есть искомое множество. Отметим сразу, что $K \neq \emptyset$. Например, концы выброшенных интервалов $1/3, 2/3, 1/9, \ldots$ не могут оказаться внутри выброшен-

[23] Георг Кантор (1845-1918) – немецкий математик. Основоположник теории множеств.

ных отрезков и не будут выброшены ни на каком шаге. Это замкнутое множество, ибо множества F_n замкнуты.

Чтобы найти меру множества K, посчитаем сначала меру его дополнения $G = [0,1] \setminus K$. Дополнение к K есть $G = \bigsqcup G_k$ и $\mu(G) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(G_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} = 1$. Значит, $\mu(K) = 1 - \mu(G) = 0$.

Покажем сейчас, что K – несчетное множество (мощности континуума). Каждое число $x \in [0,1]$ можно представить в виде троичной дроби

$$x = a_1/3 + a_2/3^2 + ... + a_k/3^k + ...,$$

где числа A_k могут принимать значения $0, 1$ и 2. С помощью такого представления легко описать те числа, которые попадают в канторово множество. Числа $x,\ 1/3 < x < 2/3$, выброшенные на первом шаге построения канторова множества, характеризуются тем, что в их троичном разложении $a_1 = 1$. Заметим, что число $1/3$, принадлежащее K, в разложении которого $a_1 = 1, a_2 = ... = a_k = 0$, можно записать в виде троичной дроби другим способом: $1/3 = 0/3 + 2/3^2 + 2/3^3 + ...$ без использования цифры 1. Аналогично на втором шаге были выброшены те числа, у которых $a_2 = 1$. Левые концы выброшенных интервалов $1/9, 2/3 + 1/9$ в разложении содержат единицу, но могут быть записаны без ее использования: $1/9 = 0/3 + 0/3^2 + 2/3^3 + 2/3^4 + ...;\quad 2/3 + 1/9 = 2/3 + 0/3^2 + 2/3^3 + 2/3^4 + ...$ Таким образом, числа, принадлежащие K, характеризуются тем, что они могут быть записаны в виде троичной дроби так, чтобы в последовательности $a_1, a_2, ...$ число 1 не встречалось. Таким образом, каждой точке $x \in K$ ставится в соответствие последовательность цифр из 0 и 2. Но множество таких последовательностей находится во взаимно однозначном соответствии с множеством последовательностей из нулей и единиц. А всякую последовательность из нулей и единиц можно рассматривать как запись некоторого действительного числа $x \in [0,1]$ в виде двоичной дроби. Таким образом, получаем отображение множества K на $[0,1]$. Отсюда вытекает, что K имеет мощность континуума.

Канторово множество обладает целым рядом других особых свойств. Например, это множество (i) не имеет изолированных точек; (ii) не имеет внутренних точек.

5.5. Лебеговское продолжение меры

Пусть $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ – алгебра множеств и на $\mathcal{K}$ задана σ-аддитивная мера m. Элементы из $\mathcal{K}$ будем называть *элементарными* множествами. Наша задача – определить меру для множеств, не входящих в $\mathcal{K}$, т.е. построить продолжение меры m.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.5.1. Пусть m – σ-аддитивная мера на алгебре $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$. *Внешней мерой* множества $A \subset X$ называется число

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup\limits_{A_j \in \mathcal{K}} A_j} \sum_j m(A_j). \tag{5.5.1}$$

Здесь нижняя грань вычисляется по всевозможным конечным или счетным покрытиям множества A элементарными множествами A_j.

Внешняя мера определена для всех множеств $A \subset X$. Покажем, что она является продолжением меры m как функция множества. Действительно, если $A \in \mathcal{K},\ A \subset \bigcup\limits_j A_j$, где $A_j \in \mathcal{K}$, то по теореме 5.4.2 имеем $m(A) \leq \sum\limits_j m(A_j)$ и, значит, $m(A) \leq \mu^*(A)$, причем точная нижняя грань достигается на покрытии, состоящем из одного множества A. Таким образом, определение внешней меры основано на том, что правая часть формулы (5.5.1) совпадает с исходной мерой на $\mathcal{K}$.

Внешняя мера, вообще говоря, не является мерой, так как она может не удовлетворять аксиоме аддитивности. Следующим шагом построения лебеговского продолжения меры является сужение класса множеств, на которых рассматривается внешняя мера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.5.2. Множество $A \subset X$ называется *измеримым* по Лебегу относительно меры m, если для него выполняется равенство

$$\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = m(X).$$

На множестве $L(\mathcal{K}, m)$, состоящем из измеримых по Лебегу множеств, определим *меру Лебега* μ (как сужение внешней меры), т.е. $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Примером измеримого множества является множество меры нуль. Действительно, согласно определению 5.4.2, множество A

называется множеством меры нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое его покрытие элементарными множествами $A \subset \bigcup_k A_k$, что $\sum_k m(A_k) < \varepsilon$. Однако существуют и неизмеримые множества.

ПРИМЕР 5.5.1. На полуинтервале $[0,1)$ зададим отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $x - y$ – рациональное число. Полуинтервал $[0,1)$ разбивается на непересекающиеся классы эквивалентных между собой точек. Выберем из каждого класса по одной точке и составим из них множество $M \subset [0,1)$. Покажем, что множество M неизмеримо. Предположим противное, т.е. что множество M измеримо. Пусть r_k – занумерованное в последовательность множество рациональных точек полуинтервала $[-1,1)$. Пусть $M + r_k = \{x + r_k : x \in M\}$. Тогда

$$[0,1) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(M + r_k) \subset [-1,2),$$

причем множества $M + r_k$ попарно не пересекаются. В силу σ-аддитивности меры Лебега получаем

$$1 \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(M + r_k) \le 3.$$

Заметим, что $\mu(M + r_k) = \mu(M)$. Поэтому если $\mu(M) = 0$, то получаем противоречие в левой части неравенства $1 \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(M + r_k) = 0$. Если $\mu(M) > 0$, то получаем противоречие в правой части неравенства $+\infty = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(M + r_k) \le 3$. Значит, множество M не является измеримым по Лебегу.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.5.1. При построении множества M из каждого класса мы выбрали по одной точке и из них составили множество M. Утверждение о том, что такой выбор можно произвести, вытекает из аксиомы выбора.

Тем не менее, множество $L(\mathcal{K}, m)$ достаточно богато. Покажем, что любое измеримое множество получается из борелевского и некоторого множества меры нуль, а именно справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.5.1. *Для любого измеримого множества A существует борелевское множество B такое, что $A \subset B$ и $\mu(B \setminus A) = 0$.*

$\triangleleft$ Возьмем последовательность $\varepsilon_n \to 0$ и для каждого n построим множество B_n, являющееся счетным или конечным объединением элементарных множеств и такое, что $A \subset B_n$ и $\mu(A) \le \mu(B_n) \le \mu(A) + \varepsilon_n$. Такое множество существует по определению внешней меры. Так как множества B_n борелевские, то множество $B = \bigcap\limits_1^{\infty} B_n$ также является борелевским. По построению $A \subset B$ и $\mu(B \setminus A) \le \mu(B_n \setminus A) \le \varepsilon_n \to 0$ и, значит, $\mu(B \setminus A) = 0$.$\triangleright$

В дальнейшем нам потребуется понятие *внутренней меры* множества $A \subset X$

$$\mu_*(A) = m(X) - \mu^*(X \setminus A).$$

Проверим, действительно ли мера Лебега является σ-аддитивным продолжением меры m. Сделаем это поэтапно, изучая свойства внешней меры, измеримых множеств и меры Лебега.

ТЕОРЕМА 5.5.2. *Если $A \subset \bigcup_k A_k$, то $\mu^*(A) \le \sum_k \mu^*(A_k)$.*

$\triangleleft$ Если A_k – элементарные множества ($A_k \in \mathcal{K}$), то неравенство справедливо по определению внешней меры. Пусть теперь A_k – произвольные множества. Тогда $\mu^*(A_k) = \inf\limits_{A_k \subset \bigcup_i B_{ki}} \sum m(B_{ki})$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и выберем такое покрытие множества A_k элементарными множествами B_{ki}, что

$$\mu^*(A_k) \le \sum_i m(B_{ki}) \le \mu^*(A_k) + 2^{-k}\varepsilon.$$

Так как $\bigcup_k A_k \subset \bigcup_{ki} B_{ki}$, получаем $A \subset \bigcup_{ki} B_{ki}$, где B_{ki} – элементарные множества. Тогда

$$\mu^*(A) \le \sum_{ki} m(B_{ki}) \le \sum_k \mu^*(A_k) + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $\mu^*(A) \le \sum_k \mu^*(A_k)$.$\triangleright$

СЛЕДСТВИЕ 5.5.1. *Для любого $A \subset X$ справедливо неравенство $\mu_*(A) \le \mu^*(A)$.*

$\triangleleft$ Из включения $X \subset A \bigsqcup (X \setminus A)$ имеем $\mu^*(X) = m(X) \leq \mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A)$. Отсюда $\mu_*(A) = m(X) - \mu^*(X \setminus A) \leq \mu^*(A)$.$\triangleright$

СЛЕДСТВИЕ 5.5.2. *Для любых A и B из X справедливо неравенство $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \triangle B)$.*

$\triangleleft$ Справедливо включение $A \subset B \cup (A \triangle B)$. Согласно теореме 5.5.2, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A \triangle B)$ т.е. $\mu^*(A) - \mu^*(B) \leq \mu^*(A \triangle B)$. Поменяв A и B местами, получаем $\mu^*(B) - \mu^*(A) \leq \mu^*(A \triangle B)$.$\triangleright$

СЛЕДСТВИЕ 5.5.3. *Для любых множеств A, B и C из X справедливо неравенство*

$$\mu^*(A \triangle B) \leq \mu^*(A \triangle C) + \mu^*(C \triangle B). \tag{5.5.2}$$

$\triangleleft$ Из включения $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$, применяя теорему 5.5.2, получаем требуемое неравенство.$\triangleright$

5.6. Измеримые множества

Продолжим изучение измеримых по Лебегу множеств.

ТЕОРЕМА 5.6.1 (КРИТЕРИЙ ИЗМЕРИМОСТИ МНОЖЕСТВА). *Следующие свойства эквивалентны:*

(i) множество A измеримо по Лебегу;

(ii) для любого $\varepsilon > 0$ существует элементарное множество B такое, что $\mu^*(A \triangle B) \leq \varepsilon$.

$\triangleleft$ *Достаточность.* Пусть $A \subset X$ и выполнено свойство (ii). Покажем, что $\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = m(X)$. Так как множество B элементарное, то $\mu^*(B) + \mu^*(X \setminus B) = m(X)$. По следствию 5.5.2 теоремы 5.5.2 имеем два неравенства:

$$\mu^*(B) - \varepsilon \leq \mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \varepsilon,$$

$$\mu^*(X \setminus B) - \varepsilon \leq \mu^*(X \setminus A) \leq \mu^*(X \setminus B) + \varepsilon.$$

Складывая их почленно, получаем

$$m(X) - 2\varepsilon \leq \mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) \leq m(X) + 2\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε будем иметь $\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = m(X)$

Необходимость. Пусть A – измеримое множество, т.е.

$$\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = m(X). \tag{5.6.1}$$

По определению внешней меры для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие множества A элементарными множествами B_k такое, что

$$\mu^*(A) \leq \sum_k m(B_k) \leq \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.6.2}$$

Последнее неравенство, в частности, означает, что числовой ряд $\sum_k m(B_k)$ сходится. Выберем такой номер N, что $\sum_{k=N+1}^{\infty} m(B_k) < \frac{\varepsilon}{3}$. Покажем, что для множества $B = \bigcup_{k=1}^{N} B_k$ выполнено свойство (ii). Поскольку $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, то оценим меры множеств $A \setminus B$ и $B \setminus A$. Так как $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, то $A \setminus B \subset \bigcup_{k=N+1}^{\infty} B_k$, следовательно,

$$\mu^*(A \setminus B) \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} m(B_k) \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.6.3}$$

Оценка для $\mu^*(B \setminus A)$ получается несколько сложнее и использует измеримость A. Для множества $X \setminus A$ выберем систему элементарных множеств (C_i) такую, что $X \setminus A \subset \bigcup_i C_i$ и

$$\sum_i m(C_i) \leq \mu^*(X \setminus A) + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.6.4}$$

Возьмем в предыдущем включении пересечение левой и правой частей с множеством B. Получим

$$B \cap (X \setminus A) = B \setminus A \subset B \bigcap (\bigcup_i C_i) = \bigcup_i (B \bigcap C_i)$$

и по теореме 5.5.2

$$\mu^*(B \setminus A) \leq \sum_i m(B \bigcap C_i) = \sum_i m(C_i) - \sum_i m(C_i \setminus B).$$

Заметим, что $(\bigcup_i B_i) \bigcup (\bigcup_i (C_i \setminus B) = X$ и, следовательно,

$$\sum_i m(B_i) + \sum_i m(C_i \setminus B) \geq m(X). \tag{5.6.5}$$

Согласно (5.6.2) и (5.6.4), имеем

$$\sum m(B_i) + \sum m(C_i) \le \mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) + 2\varepsilon/3 =$$

$$m(X) + 2\varepsilon/3. \tag{5.6.6}$$

Вычитая из неравенства (5.6.6) неравенство (5.6.5), получаем $\sum m(C_i) - \sum m(C_i \setminus B) = 2\varepsilon/3$, т.е. $\mu^*(B \setminus A) \le 2\varepsilon/3$ и $\mu^*(A \triangle B) \le \varepsilon$.$\triangleright$

СЛЕДСТВИЕ 5.6.1. *Множество A измеримо, если для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество B такое, что $\mu^*(A \triangle B) \le \varepsilon$.*

$\triangleleft$ Для множества B найдем элементарное множество B_1 такое, что $\mu^*(B_1 \triangle B) \le \varepsilon$. Тогда в силу неравенства треугольника (5.5.2) $\mu^*(A \triangle B_1) \le \mu^*(A \triangle B) + \mu^*(B \triangle B_1) \le 2\varepsilon$ и, согласно теореме 5.6.1, A – измеримое множество.$\triangleright$

ТЕОРЕМА 5.6.2. *Измеримые множества образуют алгебру множеств.*

$\triangleleft$ Пусть A_1, A_2 – измеримые множества. Нужно доказать, что множества $A_1 \cup A_2,\ A_1 \cap A_2,\ X \setminus A_1,\ A_1 \triangle A_2$ измеримы. Возьмем $\varepsilon > 0$ и выберем элементарные множества B_1 и B_2 так, что $\mu(A_i \triangle B_i) < \varepsilon,\ i = 1, 2$. Пусть $A = A_1 \cup A_2$ и $B = B_1 \cup B_2$. Так как $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$, то $\mu^*(A \triangle B) \le \mu^*(A_1 \triangle B_1) + \mu^*(A_2 \triangle B_2) \le 2\varepsilon$, т.е., согласно теореме 5.6.1, множество A измеримо. Заметим, что определение измеримости симметрично относительно A и $X \setminus A$, т.е., по определению, если A измеримо, то и $X \setminus A$ измеримо. Поэтому множества

$$A_1 \cap A_2 = X \setminus [(X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2)], A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap (X \setminus A_2),$$

$$A_1 \triangle A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)$$

измеримы.$\triangleright$

5.7. Свойства меры Лебега

Покажем теперь, что мера Лебега обладает свойством аддитивности.

ТЕОРЕМА 5.7.1. *Если $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i,\ A_i$ измеримы, то $\mu(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.*

$\triangleleft$ Доказательство достаточно провести для $n = 2$. Согласно теореме 5.5.2, выполняется неравенство $\mu(A) = \mu^*(A) \le \sum\limits_{i=1}^{n} \mu^*(A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$. Покажем, что для измеримых множеств справедливо обратное неравенство. Выберем для $\varepsilon > 0$ элементарные множества B_1 и B_2 так, что $\mu^*(A_i \triangle B_i) < \varepsilon,\ i = 1, 2$. Если $A = A_1 \sqcup A_2,\ B = B_1 \cup B_2$ то, как уже отмечалось в теореме 5.6.1, $A \triangle B \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$, и, значит, $\mu^*(A \triangle B) < 2\varepsilon$. Таким образом, имеем $\mu(A) \ge (\mu(B) - \mu(A \triangle B) > \mu(B) - 2\varepsilon$. Но $\mu(B) = \mu(B_1) + \mu(B_2) - \mu(B_1 \cap B_2)$. Так как $(B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$, то $\mu(B_1 \cap B_2) < 2\varepsilon$ и поэтому $\mu(B) \ge \mu(B_1) + \mu(B_2) - 4\varepsilon \ge \mu(A_1) + \mu(A_2) - 6\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $\mu(A) \ge \mu(A_1) + \mu(A_2)$, откуда следует утверждение теоремы.$\triangleright$

СЛЕДСТВИЕ 5.7.1. *Мера Лебега является σ-аддитивной.*

$\triangleleft$ Пусть $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, где A и A_k – измеримые множества. Согласно теореме 5.5.2, имеем $\mu(A) \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Поскольку мера Лебега аддитивна, применима теорема 5.7.1 и получаем обратное неравенство $\mu(A) \ge \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Следовательно,

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).\triangleright$$

ТЕОРЕМА 5.7.2. *Объединение счетного числа измеримых множеств измеримо.*

$\triangleleft$ Пусть $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где A_i измеримы. Представим A в виде объединения непересекающихся множеств $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A'_k$, где $A'_1 = A_1,\ A'_2 = A_1 \setminus A_2,\ A'_k = A_k \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} A_i$. Так как $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A'_i \subset A$, то, согласно теореме 5.7.1, имеем $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A'_i) \leq \mu^*(A)$. Значит, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A'_i)$ сходится (ряд из положительных членов, частные суммы ограничены сверху). Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем номер N такой, что $\sum\limits_{i=N+1}^{\infty} \mu(A'_i) < \varepsilon$. Тогда множество $C = \bigsqcup\limits_{i=1}^{N} A'_i$ измеримо. Так как $A \triangle C = \bigcup\limits_{k=N+1}^{\infty} A'_k$, $\mu^*(A \triangle C) < \varepsilon$, то в силу следствия 5.6.1 множество A измеримо.$\triangleright$

СЛЕДСТВИЕ 5.7.2. *Счетное пересечение измеримых множеств измеримо.*

$\triangleleft$ Пусть $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где A_i измеримы. Тогда $A = X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i)$, и, согласно теореме 5.7.2, A измеримо.$\triangleright$

Таким образом, объединяя доказанные утверждения, получаем основную теорему теории меры Лебега.

ТЕОРЕМА 5.7.3. *Если исходная мера m σ-аддитивна, то множество $L(\mathcal{K}, m)$ измеримых по Лебегу множеств образует σ-алгебру множеств, а мера Лебега является σ-аддитивным продолжением меры m на $L(\mathcal{K}, m)$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.7.1. Мера μ на кольце $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ называется *полной*, если из $\mu(A) = 0$ следует, что любое подмножество $B \subset A$ принадлежит $\mathcal{K}$ и $\mu(B) = 0$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.7.1. Доказать, что мера Лебега является полной.

Мы построили лебеговское продолжение меры μ при условии, что все пространство X принадлежит исходному кольцу $\mathcal{K}$, т.е. $\mu(X) < +\infty$. Уже в случае кольца, порожденного полуинтервалами на $\mathbf{R}$, и длины в качестве меры это условие не выполнено.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.7.2. Мера μ, заданная на кольце $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$, называется *$\sigma$-конечной*, если существует разбиение $X = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} X_k$, где $X_k \in \mathcal{K}$ и $\mu(X_k) < +\infty$.

ПРИМЕР 5.7.1. Длина как мера на кольце, порожденном полуинтервалами в $\mathbf{R}$, является σ-конечной мерой, так как $\mathbf{R} = \bigcup\limits_{-\infty}^{+\infty} [k, k+1)$.

ПРИМЕР 5.7.2. Мера, определенная на конечных подмножествах из $\mathbf{R}$ как число элементов этого подмножества, не является σ-конечной, так как $\mathbf{R}$ несчетно и его нельзя представить как счетное объединение конечных множеств.

Если мера m является σ-конечной, то для каждого из множеств X_k строится лебеговское продолжение меры m.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.7.3. Множество $A \subset X$ называется *измеримым*, если для любого k множество $A \cap X_k$ измеримо в X_k.

Обозначив $A_k = A \cap X_k$, получаем, что множество A измеримо точно тогда, когда $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, где A_k – измеримое множество в X_k.

Для измеримого множества $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_k \in X_k$, естественно определяется мера Лебега

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Если ряд сходится, то A называется *множеством конечной меры*; если ряд расходится, то множество A называется *множеством бесконечной меры* (записывается $\mu(A) = +\infty$).

Перейдем к рассмотрению измеримых множеств на всей прямой. Множество $A \subset \mathbf{R}$ измеримо, если для любого полуинтервала $[k, k+1)$ множество $A \cap [k, k+1)$ измеримо по Лебегу на $[k, k+1)$.

ПРИМЕР 5.7.3. Множество $A = \bigsqcup\limits_{1}^{\infty} [k, k + \frac{1}{2^k})$ – измеримое множество конечной меры $\mu(A) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$. Заметим, что это множество неограниченное, т.е. множество конечной меры может быть неограниченным на прямой.

ПРИМЕР 5.7.4. Множество $B = \bigcup\limits_{1}^{\infty} [k, k + \frac{1}{k})$ – измеримое множество бесконечной меры.

Пусть S– полукольцо, образованное прямоугольниками в $\mathbf{R^2}$ и мера на S задана как площадь прямоугольника. Лебеговское продолжение этой меры называется *мерой μ_2 Лебега на плоскости.*

Аналогично определяется мера Лебега в пространстве $\mathbf{R}^n$. На полукольце, образованном параллелепипедами $\Pi = \{x \in \mathbf{R}^n : a_k \le x_k \le b_k,\ k = 1, \dots, n\}$, задается мера $\mu(\Pi) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$. Лебеговское продолжение этой меры называется *мерой Лебега в* $\mathbf{R}^n$. Мера μ_n Лебега в $\mathbf{R}^n$ (в частности, в $\mathbf{R}$) обладает следующим свойством инвариантности: если A_1 – множество, полученное из A сдвигом или поворотом пространства $\mathbf{R}^n$, то $\mu_n(A_1) = \mu_n(A)$.

6. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Вдруг молния залила все ярко-белым
светом, и кто-то крикнул:
– Ей-Богу, вот он, мешок с золотом,
у него на груди!

Марк Твен. Приключения
Гекльберри Финна

6.1. Измеримые функции

Пусть X – множество, Σ – некоторая σ-алгебра подмножеств множества X и на Σ задана σ-аддитивная полная мера μ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1.1. Функция $f : X \to \mathbf{R}$ называется *измеримой*, если для любого числа $c \in \mathbf{R}$ множество

$$X_c = \{x \in X : f(x) < c\}$$

измеримо.

ПРИМЕР 6.1.1. Пусть χ_A –характеристическая функция множества $A \subset X$. Функция χ_A измерима, если измеримо множество A, и не измерима, если не измеримо множество A.

ПРИМЕР 6.1.2. Пусть $X = \mathbf{R}$, а μ – мера Лебега. Тогда любая функция $f \in C(\mathbf{R})$ измерима. Действительно, множество $X_c = \{x \in X : f(x) < c\}$ для непрерывной функции открыто как прообраз открытого и, значит, измеримо.

УПРАЖНЕНИЕ 6.1.1. Показать, что функция $f : X \to \mathbf{R}$ измерима точно тогда, когда при любом $c \in \mathbf{R}$ одно из множеств

$$\{x \in X : f(x) \le c\},\ \{x \in X : f(x) > c\},\ \{x \in X : f(x) \ge c\}$$

измеримо.

Одним из важнейших свойств множества измеримых функций является его замкнутость относительно предельного перехода.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1.2. Последовательность f_n функций, определенных на множестве X, сходится к функции $f : X \to \mathbf{R}$

(i) *равномерно*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n > N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(т.е. $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$);

(ii) *поточечно*, если

$$\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n > N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(т.е. $f_n \underset{X}{\to} f$);

(iii) *почти всюду*, если $f_n(x) \to f(x)$ при любом x за исключением множества меры нуль (т.е. $f_n \underset{X}{\to} f$).

УПРАЖНЕНИЕ 6.1.2. Очевидно, что из равномерной сходимости следует поточечная, а из поточечной – сходимость почти всюду. Показать, что обратное утверждение неверно.

ТЕОРЕМА 6.1.1. *Пусть $f_n \underset{X}{\to} f$, причем f_n – измеримая функция при любом $n \in \mathbf{N}$. Тогда f – измеримая функция.*

◁ Нужно доказать, что множество $X_c = \{x \in X : f(x) < c\}$ измеримо. Докажем равенство

$$X_c = \bigcup_k \bigcup_n \bigcap_{m>n} \{x : f_m(x) < c - 1/k\}. \qquad (6.1.1)$$

Равенство (6.1.1) показывает, что X_c можно получить из измеримых множеств $X_{mk} = \{x : f_m(x) < c - 1/k\}$ с помощью счетных пересечений и объединений. Значит, X_c измеримо.

Пусть $x \in X_c$, т.е. $f(x) < c$. Тогда $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = f(x) < c$ и, значит, для номеров k таких, что $1/k < c - f(x)$, т.е. $f(x) < c - 1/k$, существует номер n такой, что для любых $m > n$ выполняется $f_m(x) < c - 1/k$. Это означает, что существуют числа k n такие, что $x \in X_{mk}$ для любого $m > n$, т.е. $x \in \bigcup\limits_k \bigcup\limits_n \bigcap\limits_{m>n} X_{mk}$. Обратное рассуждение также верно: последнее включение означает, что существует число k такое, что для достаточно больших m выполняется $f_m(x) < c - 1/k$. Тогда $f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) f(x) < c$.▷

СЛЕДСТВИЕ 6.1.1. *Пусть $f_n \underset{X}{\to} f$, причем f_n – измеримая функция при любом $n \in \mathbf{N}$. Тогда f – измеримая функция.*

◁ Пусть $f_n \to f$ поточечно на множестве $X_0 \subset X$ и $\mu(X \setminus X_0) = 0$. Тогда $\{x : f(x) < c\} = [\{x : f(x) < c\} \cap X_0] \cup [\{x : f(x) < c\} \cap (X \setminus X_0)]$. Первое из этих множеств измеримо по теореме 6.1.1, а второе есть подмножество множества меры нуль и, значит, тоже измеримо.▷

УПРАЖНЕНИЕ 6.1.3. Доказать, что если $f_n \rightrightarrows f$ и f_n – измеримая функция при любом $n \in \mathbf{N}$, то f – тоже измеримая функция.

УПРАЖНЕНИЕ 6.1.4. Показать, что на отрезке $[0, 1]$ существует функция, которая не является пределом почти всюду сходящейся последовательности непрерывных функций.

ПРИМЕР 6.1.3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и почти всюду на $[0, 1]$ имеет производную $g(x)$. Функция $g(x)$ может быть разрывной. Но почти всюду $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x)-f(x-1/n)}{1/n}$ и, согласно следствию 6.1.1, $g(x)$ – измеримая функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1.3. Функции f и g, совпадающие почти всюду, будем называть *эквивалентными* (обозначим $f \sim g$), если $\mu\{x : f(x) \neq g(x)\} = 0$. Если функция f измерима, то эквивалентная ей функция g тоже измерима, так как симметрическая разность множеств $\{x : f(x) < c\}$ и $\{x : g(x) < c\}$ есть множество меры нуль и, следовательно, они одновременно измеримы.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1.1. Если функции f и g эквивалентны и последовательность f_n почти всюду сходится к f, то эта последовательность почти всюду сходится к функции g. Отсюда следует, в частности, что у сходящейся почти всюду последовательности имеется несколько пределов.

6.2. Простые функции

Пусть (X, Σ, μ) – множество X, наделенное σ-алгеброй Σ и снабженное полной σ-аддитивной мерой μ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2.1. Функция $f : X \to \mathbf{R}$ называется *простой*, если она имеет не более, чем счетное множество значений.

ПРИМЕР 6.2.1. Любая ступенчатая функция является простой.

ТЕОРЕМА 6.2.1. *Функция* $f : X \to \mathbf{R}$ *является простой точно тогда, когда* $X = \bigsqcup_k A_k$, *где* $A_k \in \Sigma$ *и* $f(x) = const$ *при* $x \in A_k$.

◁ Пусть f – простая функция, $\{y_k\}$ – множество ее значений и пусть $A_k = \{x : f(x) = y_k\}$. Тогда

$$A_k = \{x : f(x) \le y_k\} \setminus \{x : f(x) < y_k\},$$

значит, A_k измеримо и получаем представление $X = \bigsqcup_k A_k$.

Обратно, пусть имеем представление $X = \bigsqcup_k A_k$. Тогда $X_c = \{x : f(x) < c\} = \bigcup_{y_k < c} A_k$.▷

ПРИМЕР 6.2.2. Функция Дирихле[24] является простой, но не ступенчатой.

ТЕОРЕМА 6.2.2.*Для любой измеримой функции* f *существует равномерно сходящаяся к ней последовательность простых функций.*

◁ Укажем явно эту последовательность. Положим $f_n(x) = m/n$, если $m/n \le f(x) < (m+1)/n$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Множество A_{mn}, на котором функция f_n принимает постоянное значение m/n, измеримо. По построению $|f_n(x) - f(x)| \le 1/n \to 0$, т.е. последовательность f_n сходится к f равномерно.▷

УПРАЖНЕНИЕ 6.2.1. Показать, что если f – ограниченная измеримая функция, то последовательность $\{f_n\}$ состоит из простых функций, принимающих конечное множество значений.

ТЕОРЕМА 6.2.3. *Множество простых функций замкнуто относительно алгебраических операций, т.е. если* f *и* g – *простые функции, то* $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, f/g, *где* $g \ne 0$ *почти всюду – также простые функции.*

◁ Пусть $X = \bigsqcup_k A_k$ и $f(x) = y_k$ для $x \in A_k$, а также $X = \bigsqcup_i B_i$ и $g(x) = z_i$ для $x \in B_i$. Тогда $X = \bigsqcup_{ki} (A_k \cap B_i)$ и для $x \in A_k \cap B_i$ имеем $(f+g)(x) = y_k + z_i$, $(f-g)(x) = y_k - z_i$, $(fg)(x) = y_k z_i$, $(f/g)(x) = y_k / z_i$.▷

[24]Петер Густав Лежчн Дирихле (1805-1859) – немецкий математик, один из активных творцов математического анализа.

СЛЕДСТВИЕ 6.2.1. *Множество всех измеримых функций замкнуто относительно алгебраических операций.*

◁ Пусть f, g – измеримые функции. В силу теоремы 6.2.2 выберем последовательности f_n и g_n простых функций, которые сходятся равномерно к f и g соответственно. Тогда $f_n \to f$, $g_n \to g$ поточечно. Отсюда следует, что $f_n \pm g_n \to f \pm g$, $f_n g_n \to fg$, $f_n/g_n \to f/g$, $\lambda f_n \to \lambda f$ (λ – число) поточечно и поэтому $f \pm g$, fg, f/g, λf измеримы.▷

Как мы уже отмечали выше, из поточечной сходимости (сходимости почти всюду) не следует сходимость равномерная. Следующая теорема показывает, что для измеримых функций сходимость почти всюду в некотором смысле близка к равномерной.

ТЕОРЕМА 6.2.4 (ТЕОРЕМА ЕГОРОВА[25]). *Пусть*

(i) X – *множество конечной меры,*

(ii) $f_n \underset{X}{\to} f$,

(iii) f_n – *измеримая функция при любом* $n \in \mathbf{N}$.

Тогда при любом $\delta > 0$ *существует множество* $X_\delta \subset \Sigma$ *такое, что*

(i) $f_n \underset{X_\delta}{\rightrightarrows} f$,

(ii) $\mu(X \setminus X_\delta) < \delta$.

◁ Пусть $f_n(x) \to f(x)$ поточечно на подмножестве $X_0 \subset X$. Для любой точки $x \in X_0$ и любого натурального m существует номер n такой, что неравенство $|f_k(x) - f(x)| < 1/m$ выполняется для всех $k > n$. Если обозначить $X_n^m = \{x : |f_i(x) - f(x)| < 1/m$ для $i > n\}$, то предыдущее утверждение означает, что $X_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n^m$. Так как $X_1^m \subset X_2^m \subset \ldots \subset X_n^m \subset \ldots$ и множества X_n^m измеримы в силу измеримости f_i и f, то $\lim_{n\to\infty} \mu(X_n^m) = \mu(X_0)$ и, значит, $\mu(X_0 \setminus X_n^m) \to 0$, $n \to \infty$. Возьмем номер $n(m)$ таким, чтобы $\mu(X_0 \setminus X_{n(m)}^m) < \delta/2^m$. Тогда для множества $X_\delta = \bigcap_m X_{n(m)}^m$ имеем

$$X_0 \setminus X_\delta = \bigcup_m (X \setminus X_{n(m)}^m),\ \mu(X_0 \setminus X_\delta) \le$$

[25]Дмитрий Федорович Егоров (1869-1931) – российский математик. Основные работы относятся к дифференциальной геометрии, теории интегральных уравнений, вариационному исчислению и теории функций действительной переменной.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(X \setminus X^m_{n(m)}) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta$$

.

По условию $\mu(X \setminus X_0) = 0$ и, значит, $\mu(X \setminus X_\delta) \leq \mu(X \setminus X_0) + \mu(X_0 \setminus X_\delta) < \delta$. Покажем, что на построенном множестве X_δ последовательность f_n сходится равномерно к f. По $\varepsilon > 0$ выберем номер m так, чтобы $1/m < \varepsilon$. Тогда для $k > n(m)$ получаем $X_\delta \subset X^m_{n(m)}$, т.е. для $x \in X_\delta$ выполняется неравенство $|f_k(x) - f(x)| < 1/m < \varepsilon$.$\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2.1. Если множество X есть множество бесконечной меры, то утверждение теоремы Егорова не выполняется.

6.3. Определение интеграла Лебега

Пусть X – множество, наделенное конечной σ-аддитивной полной мерой μ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3.1. (i) Пусть A – измеримое множество, функция $f = \chi_A$, тогда *интегралом Лебега* функции f на множестве X называется число

$$\int\limits_X f d\mu = \mu(A).$$

(ii) Пусть

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \chi_{A_k}(x),$$

т.е. f –простая функция, принимающая конечное множество значений. Тогда *интегралом Лебега* функции f на множестве X называется число

$$\int\limits_X f d\mu = \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(A_k).$$

(iii) Пусть f – ограниченная измеримая функция. Тогда *интегралом Лебега* функции f на множестве X называется число

$$\int\limits_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu,$$

где $\{f_n\}$ – последовательность простых функций, принимающих конечное множество значений, равномерно сходящаяся к f.

УПРАЖНЕНИЕ 6.3.1. Пусть f – простая функция, принимающая конечное множество значений. Доказать, что

$$|\int\limits_X f d\mu| \leq \sup_{x\in X} |f(x)|\mu(X). \tag{6.3.1}$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.3.2. Пусть f и g – простые функции, принимающие конечное множество значений. Доказать, что

$$\int\limits_X f d\mu + \int\limits_X g d\mu = \int\limits_X (f+g) d\mu. \tag{6.3.2}$$

Установим корректность определения 6.3.1 (iii).

ЛЕММА 6.3.1. *Пусть $\{f_n\}$ – последовательность простых функций, принимающих конечное множество значений, равномерно сходящаяся к f. Тогда*

(i) существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu; \tag{6.3.3}$$

(ii) предел (6.3.3) не зависит от выбора последовательности $\{f_n\}$.

$\triangleleft$ (i) Покажем, что числовая последовательность $\{I_n\}$, где

$$I_n = \int\limits_X f_n d\mu,$$

является фундаментальной последовательностью. Действительно,

$$|I_n - I_m| \leq \left| \int\limits_X (f_n - f_m) d\mu \right| \leq \sup_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)|\mu(X) \to 0$$

при $n, m \to \infty$ в силу (6.3.1) и (6.3.2).

(ii) Пусть $\{g_n\}$ – другая последовательность, аналогичная $\{f_n\}$. Тогда

$$\left|\int_X (f_n - g_n)d\mu\right| \le \sup_{x\in X} |f_n(x) - g_n(x)|\mu(X) \to 0$$

при $n \to \infty$ в силу (6.3.1) и (6.3.2).▷

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3.2. Пусть f – ограниченная измеримая функция. *Интегральной суммой Лебега* функции f называется число

$$S_n(f) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} \frac{m}{n}\mu\{x \in X : \frac{m}{n} \le f(x) < \frac{m+1}{n}\}.$$

(Упражнение 6.2.1 показывает, что $S_n(f)$ действительно сумма, а не ряд.) *Интегралом Лебега* функции f на множестве X называется число

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} S_n(f).$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.3.3. Доказать эквивалентность определений 6.3.1 и 6.3.2.

ТЕОРЕМА 6.3.1. *Пусть $\mu(A) = 0$. Тогда для любой функции $f : A \to \mathbf{R}$ справедливо*

$$\int_A f d\mu = 0. \tag{6.3.4}$$

◁ Действительно, на множестве меры нуль любая функция измерима. Для простых функций равенство (6.3.4) очевидно, а для произвольных получается предельным переходом.▷

6.4. Суммируемые функции

Пусть X – множество, снабженное конечной σ-аддитивной полной мерой μ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.4.1. (i) Простая функция f, принимающая значения y_k на измеримых множествах A_k, $k \in \mathbf{N}$, называется *суммируемой*, если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k\mu(A_k)$$

сходится абсолютно. Если f – простая суммируемая функция, то *интегралом Лебега* функции f на множестве X называется число

$$\int_X f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} y_k\mu(A_k).$$

(ii) Измеримая функция f называется *суммируемой*, если существует последовательность $\{f_n\}$ простых суммируемых функций, равномерно сходящаяся к f на множестве X. *Интегралом Лебега* функции f на множестве X называется число

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu. \tag{6.4.1}$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.4.1. Доказать, что предел в правой части (6.4.1) всегда существует.

УПРАЖНЕНИЕ 6.4.2. Пусть функция f ограниченная и измеримая. Доказать, что функция f суммируемая.

Множество всех суммируемых функций обозначим символом $\mathcal{L}_1(X,\mu)$. Отметим некоторые простейшие свойства суммируемых функций.

ТЕОРЕМА 6.4.1. *Пусть функция $f \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$, тогда $|f| \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$.*

УПРАЖНЕНИЕ 6.4.3. Доказать теорему 6.4.1.

ТЕОРЕМА 6.4.2. *Пусть функция $f \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$, и множество $A \subset X$ измеримо. Тогда функция f суммируема на множестве A.*

◁ Действительно, пусть функции $g = \chi_A \cdot f$, $g_n = \chi_A \cdot f_n$, где $\{f_n\}$ – последовательность простых суммируемых функций, равномерно сходящаяся к f. Тогда $\{g_n\}$ – последовательность простых суммируемых функций, равномерно сходящаяся к g, и

$$\int\limits_A f d\mu = \int\limits_X g d\mu. \triangleright$$

ТЕОРЕМА 6.4.3. *Пусть функция* $f \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$ *и* $f(x) \le c$ *при всех* $x \in X$ *и некотором* $c \in \mathbf{R}$. *Тогда*

$$\int\limits_X f d\mu \le c\mu(X).$$

$\triangleleft$ Пусть $f_n(x) = k/n$, если $k/n \le f(x) < (k+1)/n$. Тогда последовательность простых функций f_n равномерно сходится к f и $f_n(x) \le f(x) \le c$. В неравенстве для простых функций

$$\int\limits_X f_n d\mu \le \sup_{x\in X} f_n(x)\mu(X) \le c\mu(X)$$

переходим к пределу при $n \to \infty$ и получаем требуемое неравенство. $\triangleright$

СЛЕДСТВИЕ 6.4.1. *Пусть функция* $f \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$ *и* $f(x) \ge 0$ *при всех* $x \in X$. *Тогда*

$$\int\limits_X f d\mu \ge 0.$$

$\triangleleft$ Применим теорему 6.4.3 к неравенству $-f(x) \le 0$. $\triangleright$

ТЕОРЕМА 6.4.4. *Пусть* f *– измеримая функция, а функция* $\varphi \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$, *причем* $|f(x)| \le \varphi(x)$ *при всех* $x \in X$. *Тогда функция* $f \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$.

$\triangleleft$ Докажем теорему для простых функций. Пусть f и φ – простые функции. Пусть имеется разбиение $X = \bigsqcup\limits_k A_k$ такое, что $f(x) = y_k$, $\varphi = z_k$, если $x \in A_k$. При этом выполняется неравенство $|y_k| \le z_k$. Тогда, составляя ряды, получаем

$$\int\limits_X f d\mu = \sum_k y_k\mu(A_k) \le \sum_k |y_k|\mu(A_k) \le \sum_k z_k\mu(A_k).$$

Ряд для функции f мажорируется абсолютно сходящимся рядом и , значит, сам абсолютно сходится. Теперь утверждение теоремы получается предельным переходом. $\triangleright$

6.5. Свойства суммируемых функций

Пусть X – множество, наделенное конечной σ-аддитивной полной мерой μ.

ТЕОРЕМА 6.5.1 (АДДИТИВНОСТЬ ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА). *Пусть функции* $f, g \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$, *тогда* $f + g \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$, *причем*

$$\int\limits_X (f+g)d\mu = \int\limits_X f d\mu + \int\limits_X g d\mu.$$

$\triangleleft$ Докажем сначала теорему для простых функций. Пусть $f(x) = y_k$ при $x \in A_k$, $X = \bigsqcup\limits_k A_k$ и $g(x) = z_l$ при $x \in B_l$, $X = \bigsqcup\limits_l B_l$. Тогда $f(x) + g(x) = y_k + z_l$ при $x \in A_k \cap B_l$, $X = \bigsqcup\limits_{k,l}(A_k \cap B_l)$. Поэтому

$$\int\limits_X f d\mu + \int\limits_X g d\mu = \sum_k y_k\mu(A_k) + \sum_l z_l\mu(B_l) =$$

$$\sum_k y_k \sum_l \mu(A_k \cap B_l) + \sum_l z_l \sum_k \mu(A_k \cap B_l) =$$

$$\sum_k \sum_k (y_k + z_l)\mu(A_k \cap B_l) = \int\limits_X (f+g)d\mu.$$

Теперь пусть f и g – произвольные суммируемые функции, и пусть $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ – равномерно сходящиеся к f и g последовательности простых суммируемых функций. Последовательность $\{f_n + g_n\}$ равномерно сходится к функции $f + g$, значит, $f + g \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$. Переходя к пределу в равенстве

$$\int\limits_X (f_n + g_n)d\mu = \int\limits_X f_n d\mu + \int\limits_X g_n d\mu,$$

получаем доказательство теоремы. $\triangleright$

СЛЕДСТВИЕ 6.5.1. *Пусть функции* $f, g \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$ *и* $f(x) \ge g(x)$ *при всех* $x \in X$. *Тогда*

$$\int\limits_X g d\mu \le \int\limits_X f d\mu.$$

$\triangleleft$ Доказательство вытекает из неравенства $f(x) - g(x) \geq 0$, теоремы 6.5.1 и следствия 6.4.1.$\triangleright$

СЛЕДСТВИЕ 6.5.2. *Пусть функции $f, g \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$, причем $f(x) \geq h(x) \geq g(x)$ при всех $x \in X$. Тогда функция $h \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$.*

$\triangleleft$ Доказательство получается из неравенства $|h(x)| \leq |f(x) + |g(x)|$ и следствия 6.5.1.$\triangleright$

ТЕОРЕМА 6.5.2 (ОДНОРОДНОСТЬ ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА). *Пусть функция $f \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Тогда функция $\lambda f \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$, причем*

$$\int\limits_X \lambda f d\mu = \lambda \int\limits_X f d\mu.$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.5.1. Доказать теорему 6.5.2.

СЛЕДСТВИЕ 6.5.3. *Пусть функция $f \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$, а g – ограниченная измеримая функция. Тогда $f \cdot g \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$, причем*

$$\left|\int\limits_X fg d\mu\right| \leq c \int\limits_X |f| d\mu, \tag{6.5.1}$$

где $c \in \mathbf{R}_+$ таково, что $|g(x)| \leq c$ при всех $x \in X$.

$\triangleleft$ Действительно, из неравенства $-c|f(x)| \leq f(x)g(x) \leq c|f(x)|$ в силу следствия 6.5.2 получаем, что функция $f \cdot g \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$, а в силу следствия 6.5.1 – справедливость неравенства (6.5.1).$\triangleright$

СЛЕДСТВИЕ 6.5.4. *Пусть функция $f \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$, тогда*

$$\left|\int\limits_X f d\mu\right| \leq \int\limits_X |f| d\mu.$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.5.2. Доказать следствие 6.5.4.

ТЕОРЕМА 6.5.3 (АДДИТИВНОСТЬ ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА ПО МНОЖЕСТВАМ). *Пусть $f \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$ и $A, B \subset X$ – измеримые множества, $A \cap B = \emptyset$. Тогда*

$$\int\limits_{A\cup B} f d\mu = \int\limits_A f d\mu + \int\limits_A f d\mu.$$

$\triangleleft$ Если $A, B \subset X$ – измеримые множества и $A \cap B = \emptyset$, то $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$. Отсюда, используя теоремы 6.4.2 и 6.5.1, получаем требуемое.$\triangleright$

СЛЕДСТВИЕ 6.5.5. *Пусть функция $f : X \to \mathbf{R}$ такова, что $f(x) = 0$ для почти всех $x \in X$. Тогда $f \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$, причем*

$$\int\limits_X f d\mu = 0.$$

$\triangleleft$ Действительно, пусть множество $A \subset X$, $\mu(A) = 0$, причем $f(x) = 0$, $x \in X \setminus A$. Тогда в силу теорем 6.3.1, 6.5.3 получаем

$$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_A f d\mu + \int\limits_{X\setminus A} 0 \cdot d\mu = 0.\triangleright$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.5.1. Пусть функции $f, g \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$, причем $f(x) = g(x)$ почти всюду на X. Тогда в силу теоремы 6.5.1 и следствия 6.5.5

$$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X g d\mu.$$

Это равенство позволяет усилить некоторые предыдущие утверждения. В частности, можно потребовать выполнение неравенств почти всюду и при этом выводы сохранятся. Так, следствие 6.5.3 справедливо, если неравенство $|g(x)| \leq c$ выполняется почти всюду. Возникает новое множество функций, измеримых и ограниченных почти всюду. Это множество обозначим символом $\mathcal{L}_\infty(X,\mu)$.

ЛЕММА 6.5.1(НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЧВА [26]). *Пусть функция $f \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$, $f(x) \geq 0$ почти всюду на X, число $c \in \mathbf{R}_+$, множество $A_c = \{x \in X : f(x) \geq c\}$. Тогда*

$$\mu(A_c) \leq \frac{1}{c} \int\limits_X f d\mu.$$

[26] Пафнутий Львович Чебышчв (1821-1894) – российский математик и механик. Основные исследования относятся к математическому анализу, теории чисел, теории вероятностей, вариационному исчислению и теории машин и механизмов.

◁ Из теорем 6.4.3 и 6.5.1 получаем цепочку неравенств:

$$\int_X f d\mu = \int_{A_c} f d\mu + \int_{X\setminus A_c} f d\mu \geq \int_{A_c} f d\mu \geq c\mu(A_c).$$

Разделив неравенство на c, получаем неравенство Чебышчва.▷

ТЕОРЕМА 6.5.4. *Пусть функция $f \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$, причем*

$$\int_X |f| d\mu = 0.$$

Тогда функция $f \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$, причем $f(x) = 0$ почти всюду на X.

◁ Обозначим $A_c = \{x \in X : |f(x)| > c\}$. Тогда $A_0 = \{x \in X : |f(x)| > 0\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$. Нужно показать, что $\mu(A_0) = 0$. По неравенству Чебышчва получаем

$$\mu(A_{1/n}) \leq \frac{1}{1/n} \int_X |f| d\mu = 0.$$

Значит, $\mu(A_0) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_{1/n}) = 0$.▷

6.6. Свойства интеграла Лебега

Пусть X – множество, снабженное конечной σ-аддитивной полной мерой μ. Начнем рассмотрение основных свойств интеграла Лебега.

ТЕОРЕМА 6.6.1(абсолютная непрерывность интеграла Лебега). *Пусть функция $f \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$. Тогда*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; (\mu(A) < \delta \Rightarrow (|\int_A f d\mu| < \varepsilon).$$

◁ Пусть сначала f – простая функция, $f(x) = y_k$, если $x \in A_k$ и $X = \bigsqcup\limits_k A_k$. Тогда

$$\int_X f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k),$$

причем ряд сходится абсолютно. Выберем номер N так, что $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} |y_k| \mu(A_k) < \varepsilon/2$. Пусть $B = \bigsqcup\limits_{N+1}^{\infty} A_k$ и $c = \max\limits_{1\leq k\leq n} |y_k| = \max\limits_{X\setminus B} |f(x)|$. Возьмем $\delta < \varepsilon/2c$. Пусть $\mu(A) < \delta$, тогда

$$\left|\int_A f d\mu\right| \leq \int_{A\cap B} |f|\, d\mu + \int_{(X\setminus B)\cap A} |f|\, d\mu \leq \varepsilon/2 + c\delta \leq \varepsilon$$

Пусть теперь f – произвольная интегрируемая функция. Выберем простую интегрируемую функцию g так, чтобы $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon/2\mu(X)$. Для простой функции g (по доказанному) можем выбрать $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство, $\left|\int\limits_A g d\mu\right| < \varepsilon/2$, если только $\mu(A) < \delta$. Тогда

$$\left|\int_A f d\mu\right| \leq \int_A |g| d\mu + \int_A |f - g| d\mu \leq (\varepsilon/2\mu(X))\mu(A) + \varepsilon/2 < \varepsilon.▷$$

СЛЕДСТВИЕ 6.6.1 (σ-аддитивность интеграла Лебега). *Пусть функция $f \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$ и множество $A = \bigsqcup\limits_k A_k$, где $A_k \subset X$ – измеримые множества. Тогда*

$$\int_A f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f d\mu,$$

причем ряд сходится абсолютно.

◁ Для функции f по $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, что если $\mu(A) < \delta$, то $|\int\limits_A f d\mu| < \varepsilon$. Выберем номер N таким, чтобы $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \mu(A_k) <$

δ. Тогда для $n > N$ выполняется равенство

$$\left|\int\limits_X f d\mu - \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{A_k} f d\mu\right| = \left|\int\limits_{\bigsqcup\limits_{N+1}^{\infty}} f d\mu\right| < \varepsilon.$$

Применяя доказанное утверждение к интегрируемой функции $|f(x)|$, получаем сходимость мажорирующего ряда и, следовательно, абсолютную сходимость рассматриваемого ряда.$\triangleright$

Верно и обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 6.6.2. *Пусть множество* $A = \bigsqcup\limits_k A_k$, *где* $A_k \subset X$ *– измеримые множества, а функция* $f \in \mathcal{L}_1(A_k, \mu)$, *причем ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} |f| d\mu \tag{6.6.1}$$

сходится. Тогда функция $f \in \mathcal{L}_1(A, \mu)$, *причем*

$$\int\limits_A f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f d\mu.$$

$\triangleleft$ Сначала предположим, что f – простая функция. Пусть $X = \bigsqcup\limits_i B_i$ и $f(x) = y_i$, если $x \in B_i$. Положив $A_{ki} = A_k \cap B_i$, имеем

$$\int\limits_{A_k} |f| d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} |y_i| \mu(A_{ki}).$$

Из сходимости ряда (6.6.1) вытекает, что сходятся ряды

$$\sum_k \sum_i |y_i| \mu(A_{ki}) = \sum_i |y_i| \mu(B_i \cap A).$$

Сходимость последнего ряда означает, что существует интеграл

$$\int\limits_A f d\mu = \sum_i y_i \mu(B_i \cap A).$$

В общем случае приближаем функцию f простой функцией g так, что

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\int\limits_{A_k} |g| d\mu \le \int\limits_{A_k} |f| d\mu + \varepsilon \mu(A_k). \tag{6.6.2}$$

Так как ряд $\sum\limits_k \mu(A_k) = \mu(A)$ сходится, то из сходимости ряда (6.6.1) вытекает сходимость ряда

$$\sum_k \int\limits_{A_k} |g| d\mu,$$

т.е. по только что доказанному интегрируемость на A простой функции g. Но тогда в силу (6.6.2) исходная функция f тоже интегрируема на X.$\triangleright$

6.7. Интеграл Лебега и предельный переход

Рассмотрение вопроса начнем с простейших наблюдений.

ТЕОРЕМА 6.7.1. *Пусть последовательность* $f_n \in \mathcal{L}_1(X, \mu)$, *причем* $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$. *Тогда* $f \in \mathcal{L}_1(X, \mu)$, *причем*

$$\int\limits_X f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int\limits_X f_n d\mu.$$

$\triangleleft$ Действительно, так как последовательность f_n сходится к f равномерно, то для любого $\varepsilon > 0$ существует n_0 такое, что при $n > n_0$ $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$. Отсюда вытекает неравенство $|f(x) \le \varepsilon + f_{n_0}(x)$, и из теоремы 6.6.4 получаем суммируемость функции f. Предельное равенство получается из неравенства

$$\int\limits_X |f_n - f| d\mu \le \sup |f_n(x) - f(x)| \mu(X).\triangleright$$

Если последовательность $\{f_n\}$ поточечно (или почти всюду) сходится к функции f, то переходить к пределу под знаком интеграла нельзя.

ПРИМЕР 6.7.1. Пусть

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n, \ 1/2n < x < 1/n; \\ 0 \text{ для остальных } x. \end{cases}$$

Тогда $f_n \in \mathcal{L}_1([0,1],\mu),\ f_n \underset{[0,1]}{\to} 0$, но

$$\int\limits_{[0,1]} f_n d\mu = 1.$$

Поэтому очень важны достаточные условия, при которых возможен предельный переход под знаком интеграла.

ТЕОРЕМА 6.7.2(теорема Лебега о предельном переходе). *Пусть $\{f_n\}$ – последовательность измеримых функций, $f_n \underset{X}{\to} f$, и существует функция $\varphi \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$ такая, что $|f_n(x)| \le \varphi(x)$ для почти всех $x \in X$. Тогда функция $f \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$ и*

$$\int\limits_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu.$$

◁ Из теоремы 6.4.4 вытекает, что $f_n \subset \mathcal{L}_1(X,\mu)$, а из теоремы 6.1.1 следует, что f – измеримая функция. Поскольку имеет место неравенство $|f_n(x)| \le \varphi(x)$, то функция $f \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$. Нужно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_ε такой, что для $n > n_\varepsilon$ выполнено

$$\left| \int\limits_X f d\mu - \int\limits_X f_n d\mu \right| < \varepsilon.$$

По свойству абсолютной непрерывности интеграла Лебега выберем $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\int\limits_A \varphi d\mu < \varepsilon/3$, если $\mu(A) < \delta$. Тогда выполняются также неравенства $\int\limits_A |f_n| d\mu < \varepsilon/3$ и $\int\limits_A |f| d\mu < \varepsilon/3$. Воспользуемся теоремой Егорова: по $\delta > 0$ найдем множество $X_\delta \subset X$ такое, что $\mu(X \setminus X_\delta) < \delta$ и на X_δ

последовательность f_n сходится равномерно. Выберем номер n_ε так, чтобы для $n > n_\varepsilon$ выполнялось

$$\sup_{x \in X_\delta} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3\mu(X)}.$$

Тогда для $n > n_\varepsilon$ имеем

$$\left| \int\limits_X f d\mu - \int\limits_X f_n d\mu \right| \le \int\limits_{X_\delta} |f - f_n| d\mu + \int\limits_{X \setminus X_\delta} |f| d\mu + \int\limits_{X \setminus X_\delta} |f_n| d\mu \le$$

$$\frac{\varepsilon}{3\mu(X)} \mu(X_\delta) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \le \varepsilon. \triangleright$$

Напомним, что последовательность функций $\{f_n\}$ называется *монотонно возрастающей*, если $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ при любых $n \in \mathbf{N}$ и $x \in X$.

ТЕОРЕМА 6.7.3 (теорема Б.Леви[27]). *Пусть $f_n \subset \mathcal{L}_1\ (X,\mu)$ – монотонно возрастающая последовательность, причем существует $C \in \mathbf{R}$ такое, что*

$$\int\limits_X f d\mu \le C.$$

Тогда $f_n \underset{X}{\to} f \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$, причем

$$\int\limits_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu.$$

◁ Заметим, что последовательность $\varphi_n(x) = f_n(x) - f_1(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы и состоит из неотрицательных функций. Поэтому доказательство теоремы достаточно провести для случая $f_n(x) \ge 0$. Зафиксируем точку x. Числовая последовательность $f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots$ возрастает и, значит, имеет

[27] Беппо Леви (1875-1961) – итальянский математик. Основные работы в области геометрии, теории алгебраических функций и квантовой механики.

конечный или бесконечный предел. Покажем, что для почти всех x предел $f_n(x)$ при $n \to \infty$ конечен. Введем множество

$$\Omega = \{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}.$$

Докажем, что $\mu(\Omega) = 0$. Возьмем произвольное число $r > 0$. Если $x \in \Omega$, то существует номер $n(x)$ такой, что $f_n(x) > r$. Если ввести множества $\Omega_n = \{x \in X : f_n(x) > r\}$, то предыдущая фраза означает, что $\Omega \subset \bigcup\limits_n \Omega_n$.

Так как $f_n \geq 0$, то применимо неравенство Чебышчва и $\mu(\Omega_n) \leq C/r$. Поскольку последовательность f_n монотонно возрастает, то $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \ldots$ и, значит,

$$\mu(\Omega \leq \lim_{n\to\infty} \mu(\Omega_n) \leq C/r.$$

Ввиду того, что r произвольно, $\mu(\Omega) = 0$.

Сведем доказательство того, что функция f суммируема и возможен предельный переход под знаком интеграла, к теореме Лебега. Построим функцию $\varphi(x) = k$, если $x \in A_k$, где $A_k = \{x : k-1 \leq f(x) < k\}$. Тогда $f_n(x) \leq f(x) \leq \varphi(x)$ и нужно только доказать, что φ суммируема, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\mu(A_k)$ сходится. Для этого достаточно показать, что частные суммы ряда

$$\sum_{k=1}^{m} k\mu(A_k) = \int\limits_{\bigsqcup\limits_1^m A_k} \varphi d\mu$$

ограничены в совокупности. На множестве $B_m = \bigsqcup\limits_1^m A_k$ имеем $f_n(x) \leq m$, поэтому на B_m применима теорема Лебега и

$$\int\limits_{B_m} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{B_m} f_n d\mu \leq C.$$

Но $\varphi(x) \leq f(x) + 1$ и получаем

$$\int\limits_{B_m} \varphi d\mu \leq \int\limits_{B_m} (f+1) d\mu \leq C + \mu(X).\triangleright$$

СЛЕДСТВИЕ 6.7.1. *Пусть* $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{L}_1(X, \mu)$, *причем* $\varphi_k(x) \geq 0$ *при всех* $x \in X$ *и* $k \in \mathbf{N}$. *Пусть ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_X \varphi_k d\mu$$

сходится. Тогда почти всюду сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x),$$

причем

$$\int\limits_X (\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_X \varphi_k d\mu.$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.7.1. Доказать следствие 6.7.1.

СЛЕДСТВИЕ 6.7.2(ТЕОРЕМА ФАТУ[28]). *Пусть последовательность* $f_n \subset \mathcal{L}_1(X, \mu)$, $f_n(x) \geq 0$ *при всех* $n \in \mathbf{N}$ *и* $x \in X$, *причем существует* $K \in \mathbf{R}$ *такое, что*

$$\int\limits_X f d\mu \leq K.$$

Пусть $f_n \underset{X}{\to} f$, *тогда* $f \in \mathcal{L}_1(X, \mu)$ *и*

$$\int\limits_X f d\mu \leq K.$$

$\triangleleft$ По последовательности f_n построим новую последовательность $\varphi_n(x) = \inf\limits_{k \geq n} f_k(x)$. Функция φ_n измерима, так как $X_C = \{x : \varphi_n(x) < C\} = \bigcup\limits_{k\geq n} \{x : f_k(x) < C\}$ и, значит, множество X_C измеримо для любого C как объединение счетного числа измеримых множеств. Последовательность $\varphi_n(x)$ монотонно возрастает,

[28] Пьер Жозеф Луи Фату (1878-1929) – французский математик. Основное направление исследований – математический анализ.

$\varphi_n(x) \to f(x)$ и $\varphi_n(x) \le f(x)$. Применяя теорему Б.Леви, получаем утверждение теоремы Фату.$\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.7.1. Если последовательность f_n удовлетворяет условиям теоремы Фату, то нельзя утверждать, что $\int\limits_X f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$. Пусть, например,

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n, \ 1/2n \le x < 1/n, \\ 0 \text{ для остальных }. \end{cases}$$

Тогда поточечно $f_n(x) \to 0$ $\int\limits_{[0,1]} f_n d\mu = 1$, но

$$0 = \int\limits_{[0,1]} f d\mu \ne \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} f_n d\mu = 1.$$

6.8. Интеграл Лебега в случае σ-конечной меры

Сначала пусть X – множество, наделенное конечной σ-аддитивной полной мерой μ.

ТЕОРЕМА 6.8.1. *Пусть $X = \bigsqcup\limits_k A_k$, $A_k \subset X$ – измеримые множества. Пусть $f : X \to \mathbf{R}$ – измеримая функция такая, что интегралы*

$$\int\limits_{A_k} |f| d\mu$$

существуют и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} |f| d\mu$$

сходится. Тогда функция $f \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$, причем

$$\int\limits_X f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f d\mu.$$

$\triangleleft$ Положим

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} |f(x)|, \ x \in A_k \\ 0, \ x \notin A_k, \end{cases}$$

тогда

$$|f(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x).$$

В силу следствия 6.7.1 функция $|f| \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$, значит, функция $f \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$ и выполнено (6.8.1).$\triangleright$

Теперь пусть X – множество с σ-конечной σ-аддитивной полной мерой μ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.8.1. Пусть $X = \bigsqcup\limits_k X_k, \mu(X_k < +\infty)$. Измеримая функция $f : X \to \mathbf{R}$ называется *суммируемой на множестве X*, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{X_k} |f| d\mu.$$

Интегралом Лебега суммируемой функции на множестве X называется число

$$\int\limits_X f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{X_k} f d\mu. \tag{6.8.1}$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.8.1. Доказать существование интеграла (6.8.1) и его независимость от разбиения множества X на множества конечной меры.

УПРАЖНЕНИЕ 6.8.2. Доказать теоремы Лебега, Б.Леви и Фату в случае σ-конечной меры.

ТЕОРЕМА 6.8.2. *Пусть $f : X \to \mathbf{R}$ – измеримая функция такая, что $f(x) \ge 0$ при всех $x \in X$. Пусть M – множество простых функций g, каждая из которых принимает конечное множество значений и удовлетворяет неравенству $g(x) \le f(x)$. Функция f суммируема на множестве X точно тогда, когда существует $C \in \mathbf{R}$ такое, что*

$$\int\limits_X g d\mu \le C \ \forall g \in M,$$

причем

$$\int\limits_X f d\mu = \sup_M \int\limits_X g d\mu. \tag{6.8.2}$$

$\triangleleft$ Обозначим $C_0 = \sup\limits_M \int\limits_X g d\mu$. Построим последовательность g_n простых функций, принимающих конечное множество значений

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{n}, & \text{если } k/n \le f(x) < (k+1)/n,\ k = 0, 1, \dots, n^2, \\ 0, & \text{если } f(x) \ge n. \end{cases}$$

Последовательность g_n монотонно возрастает и почти всюду сходится к f. Если f – суммируемая функция, то по теореме Лебега $\int\limits_X g_n d\mu \to \int\limits_X f d\mu$ и, значит, $C_0 \ge \int\limits_X f d\mu$. Так как неравенство $\int\limits_X g d\mu \le \int\limits_X f d\mu$ очевидно, получаем (6.8.2). Если существует C из условия теоремы, то к последовательности g_n применима теорема Б.Леви, функция f суммируема и по доказанному выполнено (6.8.2). $\triangleright$

6.9. Произведение мер

Пусть X, Y – произвольные непустые множества. Пусть S_X и S_Y – кольца множеств X и Y, на которых определены меры μ_X и μ_Y соответственно. В произведении $Z = X \times Y$ выделим систему подмножеств

$$S_Z = \{A \times B : A \in S_X,\ B \in S_Y\}.$$

ТЕОРЕМА 6.9.1. *Множество S_Z является полукольцом.*

$\triangleleft$ Пусть $D_1 = A_1 \times B_1$, $D_2 = A_2 \times B_2$. Тогда $D_1 \cap D_2 = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in S_Z$. Если $D_1 \supset D_2$, то

$$D_1 = A_1 \times B_1 = [(A_1 \setminus A_2) \bigsqcup A_2] \times [(B_1 \setminus B_2) \bigsqcup B_2] =$$

$$(A_1 \setminus A_2) \times [(B_1 \setminus B_2) \bigsqcup B_2] \bigsqcup (A_2 \times [(B_1 \setminus B_2) \bigsqcup B_2] =$$

$$[(A_1 \setminus A_2) \times (B_1 \setminus B_2)] \bigsqcup [(A_1 \setminus A_2) \times B_2] \bigsqcup [A_2 \times (B_1 \setminus B_2)] \bigsqcup (A_2 \times B_2).$$

Тогда

$$D_1 \setminus D_2 = [(A_1 \setminus A_2) \times (B_1 \setminus B_2)] \bigsqcup [(A_1 \setminus A_2) \times B_2] \bigsqcup [A_2 \times (B_1 \setminus B_2)]. \triangleright$$

На полукольце S_Z зададим меру μ:

$$\mu_Z(A \times B) = \mu_X(A)\mu_Y(B). \tag{6.9.1}$$

ТЕОРЕМА 6.9.2. *Если μ_X и μ_Y – σ-аддитивные меры, то и μ_Z – σ-аддитивная мера.*

$\triangleleft$ Множеству $D = A \times B$ поставим в соответствие функцию $f_D(x) = \chi_A(x)\mu_Y(B)$. Тогда $\mu_Z(D) = \int\limits_X f_D d\mu_X$. Если $D = \bigsqcup\limits_{k=1}^n D_k$, $D, D_k \in S_Z$, то $f_D(x) = \sum\limits_{k=1}^n f_{D_k}(x)$. Тогда

$$\mu_Z(D) = \int\limits_X f_D d\mu_X = \sum_{k=1}^n \int\limits_X f_{D_k} d\mu_X = \sum_{k=1}^n \mu_Z(D_k),$$

т.е. μ_Z является аддитивной функцией множеств.

Пусть $D_x = \{y : (x, y) \in D\}$ – сечение множества $D = A \times B \in S_Z$. Тогда $f_D(x) = \mu_Y(D_x)$. Если $D = \bigsqcup\limits_{k=1}^n D_k$, $D, D_k \in S_Z$, то $D_x = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} D_{kx}$. В силу σ-аддитивности меры μ_Y будем иметь

$$f_D(x) = \mu_Y(D_x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_Y(D_{kx}) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{D_k}(x).$$

К этому ряду применима теорема Лебега (здесь использована σ-аддитивность меры μ_X), и, значит,

$$\mu_Z(D) = \int\limits_X f_D d\mu_X = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_X f_{D_k} d\mu_X = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_Z(D_k). \triangleright$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.9.1. Лебеговское продолжение меры μ_Z, определенной на S_Z формулой (5.9.1), называется *произведением мер* μ_X и μ_Y и обозначается $\mu_X \otimes \mu_Y$, а пространство $X \times Y$ с мерой $\mu_X \otimes \mu_Y$ – *произведением пространств* (X, μ_X) и (Y, μ_Y).

Если есть три меры μ_1, μ_2, μ_3, то можно определить произведение $(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3$ и произведение $\mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)$. Легко проверяется, что эти меры совпадают и, значит, однозначно определено произведение $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3$.

В дальнейшем нам требуется одно важное вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 6.9.1. *Для любого измеримого множества C существует множество D такое, что $C \subset D$, $\mu(C) = \mu(D)$ и*

$$D = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n,\ D_1 \supset D_2 \supset \ldots, D_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{nk},$$

$$D_{n1} \subset D_{n2} \subset \ldots, D_{nk} \in \mathcal{K}(\mathcal{S}).$$

$\triangleleft$ По определению измеримого множества для любого n существует множество A_n, являющееся счетным объединением множеств из $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ такое, что $C \subset A_n$ и

$$\mu(A_n) \le \mu(C) + 1/n.$$

Положим $D_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k, D = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n$. Тогда $C \subset D$, $\mu(C) = \mu(D)$ и $D_n = \bigcup\limits_{j} B_{nj}$, где $B_{nj} \in \mathcal{K}(\mathcal{S})$. Положив $D_{nk} = \bigcup\limits_{j=1}^{k} B_{nj}$, получаем требуемую систему множеств.$\triangleright$

6.10. Повторный и кратный интеграл Лебега

Пусть X и Y – множества, наделенные конечными полными σ-аддитивными мерами μ_X и μ_Y. Построим меру $\mu = \mu_X \otimes \mu_Y$.

ТЕОРЕМА 6.10.1. *Пусть $C \subset X \times Y$ – μ-измеримое множество. Тогда*

(i) для почти всех x множество $C_x = \{y \in Y : (x,y) \in C\}$, μ_Y-измеримо в Y и почти всюду на X определена функция $f_C(x) = \mu_Y(C_x)$;

(ii) $(\mu_X \otimes \mu_Y)(C) = \int\limits_X f_C d\mu_X$.

$\triangleleft$ Утверждения (i) и (ii) для множеств C из кольца $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ фактически доказаны в теореме 6.9.2. Если $C = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, $C_1 \subset C_2 \subset \ldots, C_n \in \mathcal{K}(\mathcal{S})$, то последовательность f_{C_n} монотонно возрастает, и так как $C_x = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_{kx}$, то $f_C(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{C_k}(x)$ и $\int\limits_X f_{C_k} d\mu_X \le \mu(C)$. По теореме Б. Леви

$$\mu(C) = \lim_{k\to\infty} \mu(C_k) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_X f_{C_k} d\mu_X = \int\limits_X f_C d\mu_X.$$

Аналогично проверяется справедливость утверждений (i) и (ii) для множества вида $D = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n$, где $D_1 \supset D_2 \supset \ldots \supset D_n \supset \ldots$ и для множеств D_n утверждения (i) и (ii) уже имеют место. Таким образом, справедливость теоремы установлена для множеств типа D из леммы 6.9.1.

Теперь пусть C – измеримое множество такое, что $(\mu_X \otimes \mu_Y)(C) = 0$. Тогда по лемме найдется множество $D \supset C$ такое, что $(\mu_X \otimes \mu_Y)(C) = (\mu_X \otimes \mu_Y)(D) = 0$ и для D справедлива теорема. Так как $f_D(x) = f_C(x)$ почти всюду и $C_x \subset D_x$, то в силу полноты меры μ_Y $\mu_Y(C_x) = 0$ почти всюду. Таким образом, теорема доказана для произвольных множеств C нулевой меры $\mu = \mu_X \otimes \mu_Y$. Поэтому, если C – произвольное измеримое множество, то, выбирая $D \supset C$, как в лемме, будем иметь, что $f_D(x) = f_C(x)$ почти всюду. Так как для множества D теорема справедлива, то получаем

$$\mu(C) = \mu(D) = \int\limits_X f_D d\mu_X = \int\limits_X f_C d\mu_X. \triangleright$$

СЛЕДСТВИЕ 6.10.1. *Пусть $f(x) \ge 0$ – измеримая на X функция, μ_X – мера на X, μ – мера Лебега на прямой $\mathbf{R}$ и $C \subset X \times \mathbf{R}$ – множество, лежащее под графиком функции f вида $C = \{(x,t) : 0 \le t \le f(x)\}$. Тогда*

$$(\mu_X \otimes \mu)(C) = \int\limits_X f d\mu_X.$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.10.1. Доказать следствие 6.10.1.

ТЕОРЕМА 6.10.2 (теорема Фубини[29]). *I. Пусть f – суммируемая функция на $X \times Y$. Тогда*

[29]Гидо Фубини (1879-1943) – итальянский математик. Основные направления исследований – математический анализ, геометрия, математическая физика, баллистика.

(i) функция $f = f(x,y)$ при почти всех x суммируема по мере $\mu - Y$ и ее интеграл является суммируемой функцией по мере μ_X;

(ii) функция $f = f(x,y)$ при почти всех y суммируема по мере μ_X и ее интеграл является суммируемой функцией по мере μ_Y;

(iii) имеет место равенство

$$\int\limits_{X\times Y} fd(\mu_X\otimes\mu_Y) = \int\limits_X\left(\int\limits_Y fd\mu_Y\right)d\mu_X = \int\limits_Y\left(\int\limits_X fd\mu_X\right)d\mu_Y.$$

II. Если функция f измерима и неотрицательна, то из существования одного из повторных интегралов следует, что f суммируема.

◁ Т.к. любую функцию f можно представить в виде разности двух неотрицательных функций, то доказательство теоремы достаточно провести для неотрицательной функции f.

В произведении $(X,\mu_X)\times(Y,\mu_Y)\times(\mathbf{R},\mu_1)$, где μ_1 – мера Лебега, рассмотрим множество C, лежащее под графиком функции $f(x,y)$,

$$C = \{(x,y,z)\in X\times Y\times\mathbf{R} : 0\le z\le f(x,y)\}.$$

Согласно следствию 6.10.1

$$(\mu_X\otimes\mu_Y\otimes\mu_1)(C) = \int\limits_{X\times Y} fd(\mu_X\otimes\mu_Y). \tag{6.10.1}$$

Представим теперь произведение $X\times Y\times\mathbf{R}$ в виде $X\times(Y\times\mathbf{R})$ и применим теорему 6.10.1. Тогда

$$(\mu_X\otimes\mu_Y\otimes\mu_1)(C) = \int\limits_X(\mu_Y\otimes\mu_1)(C_x)d\mu_X, \tag{6.10.2}$$

где $C_x = \{(y,z) : (x,y,z)\in C\} = \{(y,z) : 0\le z\le f(x,y)\}$.

При фиксированном x множество C_x лежит под графиком функции $\varphi(y) = f(x,y)$. По следствию 6.10.1

$$(\mu_Y\otimes\mu_1)(C_x) = \int\limits_Y fd\mu_Y. \tag{6.10.3}$$

Из (6.10.1) - (6.10.3) получаем

$$\int\limits_{X\times Y} fd(\mu_X\otimes\mu_Y) = \int\limits_X\left(\int\limits_Y fd\mu_Y\right)d\mu_X.$$

Поскольку X и Y входят в условия теоремы равноправно, то получаем тот же результат, поменяв местами X и Y. Тем самым утверждения (i)-(ii) доказаны.

Для доказательства II рассмотрим неубывающую последовательность $f_n(x,y) = \min\{f(x,y),n\}$ измеримых ограниченных, и, если меры μ_X и μ_Y конечны, суммируемых функций. Так как $f_n(x,y)\to f(x,y)$ поточечно и

$$\int\limits_{X\times Y} f_n d(\mu_X\otimes\mu_Y) = \int\limits_X\left(\int\limits_Y f_n d\mu_Y\right)d\mu_X =$$

$$\int\limits_X\left(\int\limits_Y fd\mu_Y\right)d\mu_X = M,$$

то по теореме Б. Леви функция f суммируема. В случае σ-конечных мер интеграл по любому множеству конечной меры ограничен повторным интегралом и, следовательно, функция f суммируема.▷

ПРИМЕР 6.10.1. Пусть $X = Y = [-1,1]$ и $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)^2$, $f(0,0) = 0$. Тогда $\int\limits_{-1}^{1} f(x,y)dx = \int\limits_{-1}^{1} f(x,y)dy = 0$. Поэтому

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{-1}^{1} f(x,y)dy\right)dx = \int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{-1}^{1} f(x,y)dx\right)dy = 0.$$

Но интеграл Лебега на $X\times Y$ не существует, так как

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}|f(x,y)|dxdy \ge \int\limits_0^1 dr\int\limits_0^{2\pi}\frac{|\sin\varphi\cos\varphi|}{r}d\varphi =$$

$$2\int\limits_0^1 \frac{dr}{r} = +\infty.$$

ПРИМЕР 6.10.2. Пусть $X = Y = [0,1]$ и $f(x,y) = (x^2 - y^2)/(x^2+y^2)^2$, $f(0,0) = 0$. Тогда

$$\int\limits_0^1 \frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}dy = \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{y^2+x^2}\right)dy = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}dx\right)dy = -\int\limits_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

Этот пример показывает, что из существования повторных интегралов не следует, что они равны. Разумеется, в этом примере функция f не суммируема.

6.11. Интегралы Римана и Лебега

Напомним, что множество функций, интегрируемых по Риману в собственном смысле на отрезке $[a,b]$, мы условились обозначать символом $\mathcal{R}([a,b])$. Если функция $f \in \mathcal{R}([a,b])$, то ее интеграл Римана обозначается символом

$$\int\limits_a^b f dx.$$

ТЕОРЕМА 6.11.1(теорема Лебега).*Пусть функция $f \in \mathcal{R}([a,b])$, тогда $f \in \mathcal{L}_1(X,\mu)$, причем*

$$\int\limits_a^b f dx = \int\limits_{[a,b]} f d\mu.$$

◁ Построим верхнюю и нижнюю суммы Дарбу[30] для функции f. Отрезок $[a,b]$ разбиваем на 2^n частей точками $x_k = a + \frac{k}{2^n}(b-a)$, $0 \le k \le 2^n$. Пусть

$$M_{n,k} = \sup_{x_{k-1}\le x<x_k} f(x),\ m_{n,k} = \inf_{x_{k-1}\le x<x_k} f(x). \qquad (6.11.1)$$

Тогда верхняя сумма Дарбу $\overline{S}_n$ и нижняя сумма Дарбу $\underline{S}_n$ определяются равенствами

$$\overline{S}_n = \sum_{k=1}^{2^n} M_{nk}\frac{b-a}{2^n},\ \underline{S}_n = \sum_{k=1}^{2^n} m_{nk}\frac{b-a}{2^n}.$$

Построим функции $\overline{f}_n(x) = M_{nk}$, если $x_{k-1} \le x < x_k$; $\underline{f}_n(x) = m_{nk}$, если $x_{k-1} \le x < x_k$. Это простые функции, и

$$\overline{S}_n = \int\limits_{[a,b]} \overline{f}_n d\mu,\ \underline{S}_n = \int\limits_{[a,b]} \underline{f}_n d\mu.$$

С ростом n отрезок, по которому вычисляется inf в (6.11.1), уменьшается и, следовательно, inf увеличивается. Поэтому последовательность $\underline{f}_n(x)$ монотонно возрастает, т.е. $\underline{f}_n(x) \le \underline{f}_{n+1}(x)$. Аналогично последовательность $\overline{f}_n(x)$ монотонно убывает, т.е. $\overline{f}_n(x) \ge \overline{f}_{n+1}(x)$. Так как $\underline{f}_n(x) \le f(x)$ и $\overline{f}_n(x) \ge f(x)$, то существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \underline{f}_n(x) = \underline{f}(x) \le f(x),\ \lim_{n\to\infty} \overline{f}_n(x) = \overline{f}(x) \ge f(x).$$

Так как $|\underline{f}_n(x)| \le \sup|f(x)|$, $|\overline{f}_n(x)| \le \sup|f(x)|$, то по теореме Лебега о предельном переходе $\underline{f}(x)$ и $\overline{f}(x)$ – суммируемые функции и

$$\int\limits_{[a,b]} \overline{f} d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} \overline{f}_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n,$$

[30]Жан Гастон Дарбу (1842-1917) – французский математик. Основные работы посвящены математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории дифференциальных уравнений и аналитической механике.

$$\int\limits_{[a,b]} \underline{f} d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} \underline{f}_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_n.$$

Функция f интегрируема по Риману точно тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{S}_n = \int\limits_a^b f dx = I$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} (\overline{f}_n - \underline{f}_n) d\mu = \int\limits_{[a,b]} (\overline{f} - \underline{f}) d\mu = 0$$

и, значит, $\overline{f}(x) = \underline{f}(x)$ почти всюду. Но $\overline{f}(x) \le f(x) \le \underline{f}(x)$ и $f(x) = \overline{f}(x)$ почти всюду, $f(x)$ интегрируема по Лебегу и $\int\limits_{[a,b]} f d\mu = I$.▷

ЗАМЕЧАНИЕ 6.11.1. Среди функций, для которых существует несобственный интеграл Римана, есть функции, неинтегрируемые по Лебегу. Это функции, для которых несобственный интеграл $\int\limits_a^b f dx$ существует, а $\int\limits_a^b |f| dx$ расходится. В качестве примера можно взять функцию $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ на $[0,1]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.11.1. Функция $f : X \to \mathbf{R}$ называется *непрерывной почти всюду*, если множество ее точек разрыва имеет меру нуль.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.11.2. Следует различать два условия :

(i) функция непрерывна почти всюду,

(ii) функция почти всюду совпадает с непрерывной.

Именно функция Дирихле почти всюду совпадает с непрерывной, но не является непрерывной почти всюду.

Напомним еще, что необходимым условием интегрируемости функции по Риману в собственном смысле является ее ограниченность, а достаточным – непрерывность.

ТЕОРЕМА 6.11.2(КРИТЕРИЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ ПО РИМАНУ). *Ограниченная функция* $f \in \mathcal{R}([a,b])$ *точно тогда, когда* f *– почти всюду непрерывная функция.*

◁ Пусть f интегрируема по Риману. Как показано в доказательстве теоремы 6.11.1, $\overline{f}(x) = \underline{f}(x)$ почти всюду. Запишем подробнее, что значит $\overline{f}(x_0) = \underline{f}(x_0)$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Существует

номер $n(\varepsilon)$ такой, что $|\overline{f}(x_0) - \underline{f}(x_0)| < \varepsilon$. Пусть x_0 принадлежит некоторому интервалу (α, β), полученному при разбиении отрезка $[a,b]$ на 2^n частей. Тогда

$$\sup_{x\in(\alpha,\beta)} f(x) - \inf_{x\in(\alpha,\beta)} f(x) < \varepsilon$$

и, значит, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для $x \in (\alpha, \beta)$, т.е. функция f непрерывна в точке x_0. Таким образом, доказана непрерывность функции f во всех точках, кроме тех точек, где $\overline{f}(x) \ne \underline{f}(x)$, и точек вида $k/2^n$, т.е. всюду, кроме множества меры нуль. Проводя рассуждения в обратном порядке, получаем, что если f непрерывна почти всюду, то $\overline{f}(x) = \underline{f}(x)$ почти всюду. Тогда , $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}_n = \int\limits_{[a,b]} \overline{f} d\mu = \int\limits_{[a,b]} \underline{f} d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{S}_n$, т.е. по критерию интегрируемости функция f интегрируема по Риману.▷

7. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

–Ну, вот и все, Бекки. Теперь уже ты никого не должна любить, только меня, и ни за кого, кроме меня, не выходить замуж, никогда, никогда и во веки веков! Ты обещаешь?

Марк Твен. Приключения Тома Сойера

7.1. Метрические пространства

Пусть $X \neq \emptyset$ – некоторое множество. Напомним, что *метрическим пространством* называется пара (X, d), где функция $d : X \times X \to \{0\} \cup \mathbf{R}_+$ удовлетворяет следующим аксиомам:

(i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(ii) $\forall x, y \in X \ d(x, y) = d(y, x)$;

(iii) $\forall x, y, z \in X \ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$–

и называется *метрикой*. Элементы метрического пространства называются *точками*.

ПРИМЕР 7.1.1. Пусть X – множество числовых последовательностей $\{x_k\}$ таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty.$$

На множестве X введем метрику

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|.$$

Пространство (X, d) обозначается символом l_1.

ПРИМЕР 7.1.2. Пусть X – множество ограниченных числовых последовательностей. На множестве X введем метрику

$$d(x, y) = \sup_k |x_k - y_k|.$$

Пространство (X, d) обозначается символом l_∞.

УПРАЖНЕНИЕ 7.1.1. Показать, что множество $\mathbf{R}^n$ с метрикой

$$d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \right)^{1/2}$$

и множество $\mathcal{C}[a, b]$ с метрикой

$$d(x, y) = \max_{[a,b]} |x(t) - y(t)|$$

являются метрическими пространствами.

УПРАЖНЕНИЕ 7.1.2. Пусть $\mathcal{C}^\infty[a, b]$ – множество бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$. Доказать, что формула

$$d(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\max\limits_{[a,b]} |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|}{1 + \max\limits_{[a,b]} |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|}$$

определяет метрику на множестве $\mathcal{C}^\infty[a, b]$.

Исследуем топологию на множестве X, порожденную метрикой d. Напомним, что *топологией* на множестве X называется семейство τ подмножеств множества X, удовлетворяющее следующим аксиомам:

(i) если $U_\alpha \in \tau$, то $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha \in \tau$;

(ii) если $U_1 \in \tau$, $U_2 \in \tau$, то $U_1 \cap U_2 \in \tau$;

(iii) $\emptyset \in \tau$ и $X \in \tau$.

Подмножества, входящие в семейство τ, называют *открытыми в топологии* τ.

Итак, пусть X, d – метрическое пространство. Его важнейшим подмножеством является шар радиуса r с центром в точке $a \in X$

$$B_r(a) = \{x \in X : d(x, a) < r\}.$$

Пусть множество $M \subset X$. Точка $x_0 \in M$ называется *внутренней точкой* множества M, если $\exists r > 0$ $(B_r(x_0) \subset M)$. Множество всех внутренних точек множества M называется *внутренностью* и обозначается символом $\overset{o}{M}$. Множество M называется *открытым*, если $M = \overset{o}{M}$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.1.3. Доказать, что множество всех открытых множеств множества X образуют топологию на X. Такая топология метрического пространства (X, d) называется *естественной*.

Далее, пусть (X, d) – метрическое пространство, точка $x_0 \in X$. *Окрестностью* точки x_0 называется любое открытое множество, содержащееся в X и содержащее точку x_0. Точка $x_0 \in X$ называется *предельной точкой* множества $M \subset X$, если в любой окрестности точки x_0 содержится бесконечное множество точек множества M. Точка множества M, не являющаяся предельной точкой множества M, называется *изолированной точкой* множества M. Множество $M \subset X$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Множество, получающееся после присоединения к множеству M всех его предельных точек, называется *замыканием* множества M и обозначается $\overline{M}$.

Предельная точка может принадлежать множеству M, а может и не принадлежать. Каждая изолированная точка $x_0 \in M$ имеет окрестность $\mathcal{O}_{x_0}$ такую, что $\mathcal{O}_{x_0} \cap M = \{x_0\}$. Поэтому каждая точка множества M является либо предельной, либо изолированной точкой.

УПРАЖНЕНИЕ 7.1.4. Пусть (X, d) – метрическое пространство. Доказать, что множество $M \subset X$ открыто точно тогда, когда множество $X \setminus M$ замкнуто.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1.1. Пусть (X, d) – метрическое пространство. Множество $M \subset X$ называется *плотным*, если $\overline{M} = X$. Пространство (X, d) называется *сепарабельным*, если в нем имеется счетное плотное множество.

ПРИМЕР 7.1.3. Пространство $\mathbf{R}$ с естественной метрикой $d(x, y) = |x - y|$ является сепарабельным. Счетным плотным множеством является множество $\mathbf{Q}$.

ПРИМЕР 7.1.4. Пространство $\mathcal{C}[a, b]$ с метрикой

$$d(x, y) = \max_{[a,b]} |x(t) - y(t)|$$

является сепарабельным. Действительно, по теореме Вейерштрасса для любой функции $x \in \mathcal{C}[a, b]$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется многочлен

$$y = P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$$

такой, что $d(x, y) < \varepsilon$. Таким образом, множество всех многочленов плотно в $\mathcal{C}[a, b]$. Далее, любой многочлен может быть равномерно приближен многочленами с рациональными коэффициентами, а множество таких многочленов счетно.

ПРИМЕР 7.1.5. Пространство l_1 сепарабельно. Счетным плотным множеством является множество *финитных последовательностей* с рациональными членами, т.е. последовательностей вида $q_1, q_2, \ldots, q_n, 0, 0, \ldots$, где $q_k \in \mathbf{Q}$, $k = 1, \ldots, n$.

ПРИМЕР 7.1.6. Пространство l_∞ не сепарабельно. Рассмотрим множество A, элементами которого являются последовательности из нулей и единиц. Очевидно, $A \subset l_\infty$ и A – несчетное множество. Пусть $x, y \in A$, $x \neq y$, тогда $d(x, y) = 1$ и, значит, $B_{1/3}(x) \cap B_{1/3}(y) = \emptyset$. Пусть далее M-плотное множество в l_∞. Тогда при любом $x \in A$ существует $m_x \in M$ такой, что $m_x \in B_{1/3}(x)$. Отсюда $m_x \neq m_y$, если $x \neq y$. Таким образом, в M имеется несчетное подмножество, поэтому M несчетно.

7.2. Полные метрические пространства

Пусть (X, d) – метрическое пространство. Напомним, что последовательность $\{x_k\}$ точек метрического пространства (X, d) называется *сходящейся*, если существует такой элемент $a \in X$, что $d(x_n, a) \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для $n \geq N$, $d(x_n, a) < \varepsilon$. Точка a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$. В этом случае записываем $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ или $x_n \to a$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.2.1. Доказать, что в метрическом пространстве любая сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Последовательность $\{x_k\} \subset X$ называется *фундаментальной последовательностью*, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbf{N}\, \forall m, n > N\ d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

УПРАЖНЕНИЕ 7.2.2. Доказать, что в метрическом пространстве любая сходящаяся последовательность является фундаментальной последовательностью.

Обратное не верно, как показывает следующий

ПРИМЕР 7.2.1. Пусть $X = \mathbf{Q}$, $d(x,y) = |x-y|$. Последовательность $x_k = (1+1/k)^k$ является фундаментальной, но не сходящейся во множестве $\mathbf{Q}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2.1. Метрическое пространство (X,d) называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность $\{x_n\} \subset X$ сходится в X.

ПРИМЕР 7.2.2. Пространство $\mathcal{C}[a,b]$ является полным. Действительно, равномерный предел последовательности непрерывных функций является непрерывной функцией.

УПРАЖНЕНИЕ 7.2.3. Доказать, что пространство $\mathbf{R}^n$ с метрикой

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2\right)^{1/2}$$

является полным метрическим пространством.

УПРАЖНЕНИЕ 7.2.4. Доказать полноту пространств l_1 и l_∞.

ЛЕММА 7.2.1 (НЕРАВЕНСТВО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА). *Пусть (X,d) – метрическое пространство. Тогда для любых точек $x,y,z,u \in X$ справедливо неравенство*

$$|d(x,y) - d(z,u)| \le d(x,z) + d(y,u).$$

◁ Применяя неравенство треугольника, получаем

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) \le d(x,z) + d(z,u) + d(u,y)$$

или

$$d(x,y) - d(z,u) \le d(x,z) + d(y,u). \tag{7.2.1}$$

В полученном неравенстве поменяем местами пары точек (x,y) и (z,u). Получаем $-(d(x,y) - d(z,u)) \le d(x,z) + d(y,u)$, что вместе с (7.2.1) дает

$$-(d(x,z) + d(y,u)) \le d(x,y) - d(z,u) \le d(x,z) + d(y,u). \triangleright$$

ЛЕММА 7.2.2. *Пусть (X,d) – метрическое пространство и множество $M \subset X$ плотно в X. Пусть любая фундаментальная последовательность $\{x_k\} \subset M$ сходится в X. Тогда пространство (X,d) полно.*

◁ Пусть $\{y_k\} \subset X$ – фундаментальная последовательность. Для каждого y_n выберем $x_n \in M$ так, чтобы $d(x_n, y_n) < 1/n$. Тогда $\{x_k\}$ – фундаментальная последовательность, так как

$$d(x_m, x_n) \le d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n) + d(y_n, x_n) \le$$

$$1/m + d(y_n, y_m) + 1/n \to 0$$

при $m, n \to \infty$. По условию последовательность $\{x_k\}$ имеет предел $x \in X$, значит, $y_k \to x$.▷

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2.2. Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) – метрические пространства. Пространство (Y, d_Y) называется *пополнением* пространства (X, d_X), если

(i) пространство (Y, d_Y) – полное;

(ii) $X \subset Y$;

(iii) $\forall x, y \in X\ d_X(x,y) = d_Y(x,y)$.

ТЕОРЕМА 7.2.1. *Для любого метрического пространства (X,d) существует пополнение.*

◁ Если пространство X полное, то оно само является своим пополнением. Пусть X – неполное пространство, т.е. в X существуют фундаментальные последовательности, которые не сходятся в X. Пусть $\widetilde{Z}$ – множество всех несходящихся фундаментальных последовательностей. В множестве $\widetilde{Z}$ введем отношение эквивалентности: последовательность z_n эквивалентна последовательности z'_n (запись $\{z_n\} \sim \{z'_n\}$), если $\lim\limits_{n\to\infty} d(z_n, z'_n) = 0$. Рефлексивность и симметричность отношения очевидны. Если $\{z_n\} \sim \{z'_n\}$ и $\{z'_n\} \sim \{z''_n\}$, то $d(z_n, z''_n) \le d(z_n, z'_n) + d(z'_n, z''_n) \to 0$, т.е. $\{z_n\} \sim \{z''_n\}$. Введенное отношение транзитивно и, значит, является отношением эквивалентности. Множество $\widetilde{Z}$ разбивается на непересекающиеся классы эквивалентных между собой фундаментальных последовательностей. Множество классов эквивалентности обозначим Z. Каждому элементу $x \in X$ поставим в соответствие класс $[x]$, состоящий из последовательностей, которые сходятся к x. Эти последовательности являются фундаментальными последовательностями и эквивалентны в определенном выше смысле. Пусть X' – множество таких классов. Очевидно, что отображение $x \to [x]$ есть биективное отображение из X в X'. Чтобы новое множество Y состояло из элементов одинаковой природы, будем вместо X рассматривать множество X' и определим $Y = X' \cup Z$. Введем на множестве Y метрику. Если $y = [x_n]$ – класс, содержащий последовательность $\{x_n\}$, $y' = [x'_n]$, то положим

$$d_Y(y, y') = \lim_{n\to\infty} d_X(x_n, x'_n). \qquad (7.2.2)$$

Проверим, что равенство (7.2.2) действительно задает функцию на $Y \times Y$.

Так как $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ – фундаментальные последовательности, то, используя неравенство четырехугольника, получаем

$$|d_X(x_n, x'_n) - d_X(x_m, x'_m)| \le d_X(x_n, x_m) + d_X(x'_n, x'_m) \to 0.$$

Это означает, что числовая последовательность $d(x_n, x'_n)$ является фундаментальной и, значит, существует $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x'_n)$. Пусть $\{y^*_n\}$ – другой представитель класса y. Тогда

$$|d_X(y^*_n, y_n) - d_X(y_n, y'_n)| \le d_X(y^*_n, y_n) \to 0$$

и, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} d(y^*_n, y'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, y'_n) =$, т.е. предел не зависит от того, какой представитель из класса последовательностей выбран.

Выполнение аксиом метрики легко проверяется. Пусть, например, $\overline{y}, \overline{y}'$ – элементы из Z и $d_Y(\overline{y}, \overline{y}') = 0$. Тогда для представителей y_n и y'_n классов $\overline{y}$ и $\overline{y}'$ имеем $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$, откуда $\overline{y} = \overline{y}'$. Равенство $d_Y(\overline{y}, \overline{y}') = d_Y(\overline{y}', \overline{y})$ очевидно. Предельным переходом из неравенства

$$d_X(y_n, y'_n) \le d_X(y_n, y''_n) + d_X(y''_n, y'_n)$$

получаем неравенство треугольника для d_Y:

$$d_Y(y, y') \le d_Y(y, y'') + d_Y(y'', y').$$

Переходим к проверке того, что метрическое пространство (Y, d_Y) действительно является пополнением (X, d_X). Если $y = [x] \in X'$ и $y' = [x'] \in X'$, то очевидно, что $d_Y(y, y') = d_X(x, x')$ и, значит, новая метрика на X' совпадает с исходной, т.е. (X', d_X) – подпространство в (Y, d_Y). Если $\overline{y} \in Z$ и $\overline{y} = [\underline{y_n}]$, то $d_Y(y_n, \overline{y}) = \lim\limits_{m\to\infty} d_X(y_n, y_m) \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, $\overline{y} \in \overline{X}$. Проверим полноту пространства Y. Пусть $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность, составленная из элементов пространства X и $\overline{x} = [x_n]$. Если она сходится в пространстве X, то она сходится и в Y. Если же x_n не сходится в X, то она определяет в Y класс $\overline{x} = [x_n] \in Z$, к которому сходится в пространстве Y.

Наконец, применяя лемму 7.2.2, получаем, что пространство Y является полным.▷

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2.1. Конструкция в доказательстве теоремы аналогична построению теории действительных чисел. Если в качестве исходного пространства X взять множество рациональных чисел $\mathbf{Q}$ с метрикой $d(x, y) = |x - y|$, то построенное в теореме множество Z есть множество иррациональных чисел. Иначе говоря, иррациональное число можно считать классом эквивалентных фундаментальных последовательностей, состоящих из рациональных чисел и не имеющих предела в множестве рациональных чисел. Запись иррационального числа в виде бесконечной непериодической десятичной дроби представляет собой выбор представителя из класса фундаментальных последовательностей. Например, равенство $\pi = 3,14159259...$ означает, что число π есть класс фундаментальных последовательностей, содержащий последовательность рациональных чисел $x_1 = 3$; $x_2 = 3,1$; $x_3 = 3,14$; $x_4 = 3,141$; ....

Заметим вместе с тем, что построение действительных чисел нельзя рассматривать как частный случай теоремы о пополнении метрических пространств, так как само понятие метрического пространства и доказательство теоремы уже используют действительные числа.

7.3. Банаховы[31] пространства

Пусть $X \neq \emptyset$ – некоторое множество, K –некоторое алгебраическое поле. Напомним, что пара (X, K) называется *линейным пространством над полем* K, если определены два отображения:

(i) $X \times X \ni (x, y) \to x + y \in X$ (сложение);

(ii) $K \times X \ni (\lambda, x) \to \lambda x \in X$ (умножение),

для которых выполняются следующие аксиомы.

(i) Множество X является абелевой группой относительно сложения.

(ii) $\forall \lambda, \mu \in K\ \forall x, y \in X\ (\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x) \wedge (1 \cdot x = x) \wedge$
$(\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y) \wedge ((\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x)$.

В данном случае элементы множества X называются *векторами.*

ПРИМЕР 7.3.1. Пусть T – произвольное множество. Множество всех функций, определенных на T, является линейным пространством с естественными операциями сложения и умножения на число.

ПРИМЕР 7.3.2. Доказать, что множество $l_p,\ p \geq 1$ всех последовательностей $x = (x_1, x_2, ...),\ x_k \in \mathbf{R},\ k \in \mathbf{N}$ таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty$$

является линейным пространством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3.1. Пусть (X, K) – линейное пространство. Пара (Y, K) называется *линейным подпространством*, если

(i) $Y \subset X$;

(ii) (Y, K) – линейное пространство.

В дальнейшем простоты ради мы будем отождествлять множество X и линейное пространство (X, K).

Пусть Y – линейное подпространство линейного пространства X. Введем в X отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $x - y \in Y$. Множество X распадается на непересекающиеся классы эквивалентных между собой элементов. В множестве классов эквивалентности, которое обозначается X/Y, вводятся операции

[31] Стефан Банах (1892-1945) – польский математик. Основное направление исследований – функциональный анализ.

сложения и умножения на число $[x] + [y] = [x + y],\ \lambda[x] = [\lambda x]$. Здесь $[x]$ – класс, содержащий элемент x.

УПРАЖНЕНИЕ 7.3.1. Проверить, что операции введены корректно и множество X/Y удовлетворяет аксиомам линейного пространства.

Построенное линейное пространство X/Y называется *фактор-пространством* пространства X по подпространству Y.

УПРАЖНЕНИЕ 7.3.2. Пусть $X = \mathbf{R}^n,\ Y = \mathbf{R}^m,\ m < n$. Найти фактор-пространство X/Y.

УПРАЖНЕНИЕ 7.3.3. Пусть $X = \mathcal{C}[a, b],\ Y = \{x \in X : x(a) = 0\}$. Показать, что X – линейное пространство, Y – линейное подпространство, и найти фактор-пространство X/Y.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3.2. Пусть X – линейное пространство над полем $\mathbf{R}$. Отображение $\|\cdot\| : X \to \mathbf{R}$ называется *нормой*, если

(i) $\forall x \in X\ \|x\| \geq 0$;

(ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(iii) $\forall \lambda \in \mathbf{R}\ \forall x \in X\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

(iv) $\forall x, y \in X\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Пара $(X, \|\cdot\|)$ называется *линейным нормированным пространством.*

УПРАЖНЕНИЕ 7.3.4. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – линейное нормированное пространство. Доказать,

(i) что формула $d(x, y) = \|x - y\|$ определяет метрику на X,

(ii) метрика d обладает следующими свойствами:

$d(x, y) = d(x + z, y + z)$ (инвариантность относительно сдвига),

$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ (положительная однородность).

УПРАЖНЕНИЕ 7.3.5. Пусть $d : X \times X \to \mathbf{R}$ – метрика на линейном пространстве X. Доказать, что если d инвариантна относительно сдвига и положительно однородна, то функция $\|x\| = d(x, 0)$ является нормой на пространстве X.

ПРИМЕР 7.3.3. Множество $\mathcal{C}[a, b]$ – линейное нормированное пространство с нормой

$$\|x\| = \max_{[a,b]} |x(t)|.$$

ПРИМЕР 7.3.4. Множество $\mathcal{C}^{\infty}[a, b]$ – линейное метрическое пространство с метрикой

$$d(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\max\limits_{[a,b]}|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)|}{1+\max\limits_{[a,b]}|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)|}.$$

Эта метрика не является положительно определенной и поэтому не порождает никакой нормы.

Другими словами, любая норма на линейном пространстве порождает метрику, превращая тем самым любое линейное нормированное пространство в линейно метрическое пространство, однако не всякая метрика порождает норму.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3.3. Линейное нормированное пространство называется *полным*, если оно полно как метрическое пространство. Полное линейное нормированное пространство называется *банаховым*.

ПРИМЕР 7.3.5. Пространство $\mathcal{C}[a,b]$ является банаховым.

УПРАЖНЕНИЕ 7.3.6. Пусть $\mathcal{C}^n[a,b]$ – множество непрерывно дифференцируемых до порядка n включительно на отрезке $[a,b]$ функций. Доказать, что множество $\mathcal{C}^n[a,b]$ с нормой

$$\|x\|=\sum_{k=0}^{\infty}\max_{[a,b]}|x^{(k)}(t)|$$

является банаховым пространством.

ТЕОРЕМА 7.3.1. *Для любого линейного нормированного пространства X существует банахово пространство Y, являющееся его пополнением, причем X является линейным подпространством в Y.*

$\triangleleft$ Пусть X – неполное линейное нормированное пространство, тогда по теореме 7.2.1. существует его пополнение Y. Однако Y еще не будет линейным пространством, т.к. пополнение (по доказательству теоремы 7.2.1) не является линейным пространством. Множество Y легко превратить в линейное пространство, задав операции следующим образом. Пусть $x,y\in Y$, возьмем последовательности $\{x_n\},\{y_n\}\subset X$ такие, что $x_n\to x,\ y_n\to y$. Положим,

$$x+y=\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n),\ \lambda x=\lim_{n\to\infty}\lambda x_n.$$

Корректность введения операций и выполнения аксиом линейного нормированного пространства проверяется непосредственно.$\triangleright$

В линейном нормированном пространстве X можно рассматривать ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$, где $x_k\in X$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$ называется *сходящимся*, если последовательность частичных сумм $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$ сходится. Элемент $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ называется *суммой ряда* и обозначается $S=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$. Вместе с рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$ можем рассмотреть числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$, составленный из норм элементов. Если ряд, составленный из норм $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$, сходится, то исходный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$ называют *абсолютно сходящимся*.

ТЕОРЕМА 7.3.2 (КРИТЕРИЙ ПОЛНОТЫ ЛИНЕЙНОГО НОРМИРОВАННОГО ПРОСТРАНСТВА). *Линейное нормированное пространство является банаховым точно тогда, когда в нем каждый абсолютно сходящийся ряд сходится.*

$\triangleleft$ *Необходимость.* Пусть X – банахово пространство и пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|a_k\|$ сходится. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$. Проверим, что частичные суммы этого ряда $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ образуют фундаментальную последовательность. Действительно, если $m>n$, то

$$\|S_m-S_n\|=\|\sum_{k=n+1}^{m}a_k\|\le\sum_{k=n+1}^{m}\|a_k\|\to 0,\ n,m\to\infty.$$

Так как пространство X полно, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится. Кроме того, выполняется неравенство $\|\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\|\le\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|a_k\|$, которое является обобщением неравенства треугольника для норм.

Достаточность. Пусть в нормированном пространстве X любой абсолютно сходящийся ряд сходится. Возьмем произвольную фундаментальную последовательность x_n в X. Выберем подпоследовательность x_{n_k} так, что $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 1/2^k$. Тогда для ряда $x_{n_1} + \sum\limits_{k=2}^{\infty}(x_{n_k} - x_{n_{k-1}})$ ряд, составленный из норм, сходится и, значит, сходится исходный ряд. Но для этого ряда его частичная сумма равна x_{n_k} и, таким образом, выделенная подпоследовательность x_{n_k} сходится. Если у фундаментальной последовательности сходится подпоследовательность, то сходится и сама последовательность. $\triangleright$

7.4. Гильбертовы[32] пространства

Пусть X – линейное пространство над полем $\mathbf{R}$. Напомним, что отображение $X \times X \ni (x, y) \to \mathbf{R}$ называется скалярным произведением, если

(i) $\forall x, y \in X\ (x, y) = (y, x)$;
(ii) $\forall x \in X\ (x, x) \geq 0$;
(iii) $\forall x, y, z \in X\ \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}\ (\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$.

Пара $(X, (\cdot,\cdot))$ называется *евклидовым*[33] *пространством.*

УПРАЖНЕНИЕ 7.4.1. Пусть (a_{kl}) – положительно определенная матрица. Показать, что формула

$$(x, y) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} x_k y_l$$

задает скалярное произведение в пространстве $\mathbf{R}^n$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.4.2. Доказать, что l_2 – евклидово пространство со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

[32] Давид Гильберт (1862-1943) – немецкий математик. Основные исследования в геометрии, алгебре, функциональном анализе, математической физике и математической логике.

[33] Евклид (ок. 340 - ок. 287 до н.э.) – математик эпохи эллинизма. Основные работы по геометрии, оптике и музыке.

УПРАЖНЕНИЕ 7.4.3. Доказать, что множество $\mathcal{C}[a, b]$ со скалярным произведением

$$(x, y) = \int\limits_a^b x(t) y(t) dt$$

является евклидовым пространством.

В дальнейшем мы будем отождествлять евклидово пространство $(X, (\cdot,\cdot))$ и множество X.

ЛЕММА 7.4.1 (неравенство Коши-Буняковского[34]). *Пусть X – евклидово пространство. Тогда для любых $x, y \in X$ справедливо неравенство*

$$|(x, y)| \leq (x, x)^{1/2} (y, y)^{1/2}.$$

$\triangleleft$ Если $x = 0$ или $y = 0$, то неравенство очевидно. Пусть $y \neq 0$, положим

$$\lambda = \frac{(x, y)}{(y, y)}$$

и построим вектор $z = \lambda y$. Тогда $(x - z, y) = 0$, и поэтому

$$0 \leq (x - \lambda y, x - \lambda y) = (x, x) - \lambda(y, x) = (x, x) - \frac{(x, y)^2}{(y, y)}. \triangleright$$

УПРАЖНЕНИЕ 7.4.4. Пусть $(X, (\cdot,\cdot))$ – евклидово пространство. Доказать, что формула

$$\|x\| = (x, x)^{1/2}$$

определяет норму на пространстве X.

Другими словами, любое евклидово пространство является линейным нормированным пространством.

УПРАЖНЕНИЕ 7.4.5. Доказать, что в любом евклидовом пространстве справедливо *тождество параллелограмма.*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

[34] Виктор Яковлевич Буняковский (1804-1889) – российский математик. Основные работы в теории вероятностей и теории чисел.

УПРАЖНЕНИЕ 7.4.6. Пусть в линейном нормированном пространстве выполняется тождество параллелограмма. Доказать, что формула

$$(x,y)=\frac{1}{4}(||x+y||^2-||x-y||^2)$$

описывает скалярное произведение, причем $(x,x)^{1/2}=||x||$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.4.1. Полное евклидово пространство называется *гильбертовым пространством.*

ТЕОРЕМА 7.4.1. *Для любого евклидова пространства X существует гильбертово пространство Y, являющееся его пополнением, причем X является линейным подпространством в Y.*

◁ Поскольку евклидово пространство X является линейным нормированным пространством, то по теореме 7.3.1 существует банахово пространство Y, являющееся его пополнением. Пусть векторы $x, y \in Y$, последовательности $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X$, причем $x_n \to x,\ y_n \to y$. Формулой

$$(x,y)=\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)$$

определим скалярное произведение в Y.

Докажем корректность определения. Пусть $\{x'_n\}, \{y'_n\} \subset X$ – последовательности такие, что $x'_n \to x,\ y'_n \to y$. Покажем сначала, что

$$(x,y)=\lim_{n\to\infty}(x'_n,y_n).$$

Действительно,

$$|(x_n,y_n)-(x'_n,y_n)|=|(x+n-x'_n,y_n)|\le ||x_n-x'_n||||y_n||$$

в силу неравенства Коши-Буняковского. Аналогично показывается, что

$$(x,y)=\lim_{n\to\infty}(x_n,y'_n).$$

Теперь

$$(x'_n,y'_n)=(x_n,y_n)-(x_n,y_n-y'_n)-(x_n,y'_n)+(x'_n,y'_n-y_n)+(x_n,y_n).$$

Применив здесь неравенство Коши-Буняковского, получим требуемое.

Выполнимость аксиом скалярного произведения проверяется аналогично. ▷

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.4.2. Пусть X – евклидово пространство. Векторы $x, y \in X$ называются *ортогональными*, если $(x,y)=0$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.4.7. Пусть $\mathcal{C}[-\pi,\pi]$ – евклидово пространство со скалярным произведением

$$(x,y)=\int_{-\pi}^{\pi}x(t)y(t)dt.$$

Показать, что множество

$$\{1,\cos t,\sin t,\cos 2t,\sin 2t,...\}$$

состоит из ортогональных векторов.

ТЕОРЕМА 7.4.2 (теорема Пифагора[35]). *Пусть X – евклидово пространство. Пусть множество $\{x_1,x_2,...,x_n\} \subset X$ состоит из ортогональных векторов и вектор*

$$x=\sum_{k=1}^{n}x_k.$$

Тогда

$$||x||^2=\sum_{k=1}^{n}||x_k||^2.$$

◁ Непосредственным вычислением получаем

$$||x||^2=(x,x)=\left(\sum_{k=1}^{n}x_k,\sum_{k=1}^{n}x_k\right)=\sum_{k,i=1}^{n}(x_k,x_i)=$$

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k,x_k)=\sum_{k=1}^{n}||x_k||^2. \triangleright$$

[35] Пифагор (ок. 570 - ок. 500 до н.э.) – древнегреческий математик. Основоположник геометрии как дедуктивной науки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.4.3. Пусть X – евклидово пространство. Множество векторов $\{e_1, e_2, ...\} \subset X$ называется *ортонормированной системой*, если

$$\forall k, l \in \mathbf{N}\ (e_k, e_l) = \delta_{kl},$$

где δ_{kl} – символ Кронекера. Ортонормированная система обозначается символом (e_k).

Пусть X – евклидово пространство, (e_k) – ортонормированная система. Пусть $x \in X$ – некоторый вектор. Число $c_k = (x, e_k)$ называется *коэффициентом Фурье* вектора x, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \ -$$

рядом Фурье.

ТЕОРЕМА 7.4.3. *Пусть (e_k) – ортонормированная система в гильбертовом пространстве X, $x \in X$ – произвольный вектор. Тогда*

(i) числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ сходится, причем справедливо неравенство Бесселя[36] $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \le \|x\|^2$*;*

(ii) ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ сходится;

(iii) вектор $x \in X$ равен сумме своего ряда Фурье точно тогда, когда справедливо равенство Парсеваля[37]*-Стеклова*[38]

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2.$$

[36]Фридрих Вильгельм Бессель (1784-1846) – немецкий математик и астроном. Работы в области теории дифференциальных уравнений и небесной механики.

[37]Марк Антуан Парсеваль (1755-1836) – французский математик. Основные труды по теории дифференциальных уравнений и теории функций действительной переменной.

[38]Владимир Андреевич Стеклов (1863-1926) – советский математик. Основные работы в области теории дифференциальных уравнений и теории функций действительной переменной.

$\triangleleft$ (i) Рассмотрим частичную сумму ряда Фурье $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$. Проверим, что разность $x - S_n$ ортогональна e_j, $j = 1, \dots, n$. Действительно,

$$(x - S_n, e_j) = (x, e_j) - \sum_{k=1}^{n} c_k (e_k, e_j) = c_j - c_j = 0.$$

Значит, в разложении элемента x в сумму

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k + (x - S_n)$$

все слагаемые ортогональны и по теореме Пифагора

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \|x - S_n\|^2, \qquad (7.4.1)$$

отсюда $\sum\limits_{k=1}^{n} |c_k|^2 \le \|x\|^2$ и, значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ сходится, причем справедливо неравенство Бесселя $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \le \|x\|^2$.

(ii) Покажем, что последовательность частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$ является фундаментальной последовательностью. Для $n > m$ имеем

$$\|S_n - S_m\|^2 = \| \sum_{k=m+1}^{n} c_k e_k \|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2 \to 0 \ n, m \to \infty.$$

Так как пространство X полно, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ сходится к элементу $S \in X$.

(iii) Переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве (7.4.1), получаем $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 + \|x - S\|^2$, откуда видно, что равенство Парсеваля-Стеклова эквивалентно тому, что $\|x - S\| = 0$, т.е. $x = S$.$\triangleright$

7.5. Ортонормированные базисы

Пусть X – линейное нормированное пространство. Множество $B \subset X$ называется *линейно независимым*, если для любого конечного множества $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset B$ из равенства

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$$

следуют равенства $\lambda_k = 0,\ k = 1, 2, ..., n$. Линейно независимое множество $B \subset X$ называется *базисом*, если

$$\forall x \in X\ \exists \{\lambda_k\} \subset \mathbf{R}\ \exists \{x_k\} \subset B\ (x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k).$$

ТЕОРЕМА 7.5.1. *В любом линейном пространстве X существует базис.*

$\triangleleft$ Рассмотрим множество M всех линейно независимых подмножеств из X. На M зададим отношение порядка по включению. Пусть M_0 – линейно упорядоченное подмножество в M. Тогда множество в X вида $B_0 = \bigcup_{B \in M_0} B$ является также линейно независимым и мажорирует каждый элемент из M_0, т.е. является верхней гранью для M_0. Значит, в упорядоченном множестве M выполнены условия леммы Цорна и в M существует максимальное линейно независимое множество, которое и является базисом в X.$\triangleright$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.5.1. Пусть X – банахово пространство. Линейно независимое множество $\{e_1, e_2, ...\}$ называется *базисом Шаудера*[39], если

(i) любой вектор $x \in X$ представим в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k,$$

причем единственным образом;

[39]Юлиуш Павел Шаудер (1896-1943) – польский математик. Основные исследования относятся к топологии.

(ii) существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \|\sum_{k=1}^{n} c_k e_k - x\| = 0.$$

Очевидно, что банахово пространство, в котором существует базис Шаудера, является сепарабельным. Действительно, конечные линейные комбинации вида

$$\sum_{k=1}^{n} c_k e_k$$

с рациональными коэффициентами c_k образуют счетное плотное множество. Известная проблема базиса заключалась в том, чтобы выяснить, существует ли базис Шаудера в произвольном сепарабельном банаховом пространстве. Шведским математиком П. Энфло в 1972 году был построен пример сепарабельного банахова пространства, в котором нет базиса.

ПРИМЕР 7.5.1. Построим базис Шаудера в пространстве $\mathcal{C}[0,1]$. Этот базис имеет следующий вид: $e_0(t) = t,\ e_1(t) = 1 - t$. Для записи остальных функций базиса более удобна нумерация двумя целыми индексами $n = 1, 2, ...,\ k = 0, 1, ..., 2^{n-1} - 1$:

$$e_{n,k}(t) = \begin{cases} 2^n t - 2k,\ \frac{2k}{2^n} \le t \le \frac{2k+1}{2^n}, \\ -2^n t + 2k + 2,\ \frac{2k+1}{2^n} \le t \le \frac{2k+2}{2^n}, \\ 0 \text{ для остальных } t. \end{cases}$$

При разложении по этому базису частичные суммы ряда являются естественными аппроксимациями функции x кусочно-линейными непрерывными функциями.

В гильбертовых пространствах вопрос о существовании базиса Шаудера решается исчерпывающим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.5.2. Пусть X – гильбертово пространство. Ортонормированная система $(e_k) \subset X$ называется *полной*, если из равенств $(x, e_k) = 0$ при всех $k \in \mathbf{N}$ вытекает, что $x = 0$.

ТЕОРЕМА 7.5.2. *Пусть X – гильбертово пространство, $(e_k) \subset X$ – полная ортонормированная система. Тогда (e_k) является базисом Шаудера.*

◁ Пусть $x \in X$ – произвольный вектор и

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k -$$

его ряд Фурье. По теореме 7.4.3 этот ряд сходится. Положим,

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$$

тогда

$$(x - y, e_k) = (x, e_k) - c_k = 0$$

при всех $k \in \mathbf{N}$. Отсюда $x = y$ в силу полноты ортонормированной системы (e_k).

Пусть существуют два разложения вектора x в ряд Фурье, т.е.

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k.$$

Тогда

$$0 = (x - x, e_k) = a_k - b_k$$

при всех $k \in \mathbf{N}$.▷

ТЕОРЕМА 7.5.3. *Пусть гильбертово пространство X сепарабельно и бесконечномерно. Тогда в нем существует полная ортонормированная система.*

◁ Возьмем в X счетное плотное множество $(z_n)_{n=1}^{\infty}$. Выберем подпоследовательность $y_1, ..., y_n, ...$, полученную из последовательности z_n выбрасыванием элементов, которые линейно зависят от предыдущих. Построенная система (y_k) линейно независима, бесконечна и порождает все пространство X, т.к. плотное множество (z_n) состоит из линейных комбинаций векторов y_k. Теперь укажем, как по линейно независимой системе (y_k) построить полную ортонормированную систему (процесс ортогонализации Грамма-Шмидта [40]).

Положим $e_1 = y_1/\|y_1\|$. Затем выберем e_2' в виде $e_2' = y_2 - ae_1$, где постоянную a найдем из условия $(e_2', e_1) = 0$. Отсюда

[40] Эдхард Шмидт (1876-1959) – немецкий математик. Основные труды по функциональному анализу.

$(y_2 - ae_1, e_1) = 0$ и $a = (y_1, e_1)$. Далее $e_2 = e_2'/\|e_2'\|$. Продолжая построение по индукции, полагаем $e_n' = y_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} c_k e_k$, где $c_k = (y, e_k)$ и $e_n = e_n'/\|e_n'\|$. Построенная система ортонормирована по построению. Так как $y_n = e_n\|e_n'\| + \sum\limits_{k=1}^{n-1} c_k e_k$, то линейные комбинации элементов из (e_n) образуют всюду плотное множество. Значит, подпространство, порожденное (e_n), совпадает со всем X, т.е. (e_n) – полная ортонормированная система.▷

Условимся в дальнейшем полную ортонормированную систему в сепарабельном бесконечномерном гильбертовом пространстве называть *ортонормированным базисом.*

7.6. Пространство Лебега $L_1(T, \mu)$

Пусть (T, Σ, μ) – пространство с мерой, т.е. T – множество, Σ – σ-алгебра измеримых множеств, μ – полная σ-аддитивная конечная мера. Обозначим через $\mathcal{L}_1(T, \mu)$ множество всех функций, интегрируемых по Лебегу на T, т.е. функций, для которых существует интеграл Лебега $\int\limits_T |x| d\mu$. Наиболее важный случай, когда $T = [a, b]$, а μ – мера Лебега.

УПРАЖНЕНИЕ 7.6.1. Доказать, что $\mathcal{L}_1(T, \mu)$ – линейное пространство. В $\mathcal{L}_1(T, \mu)$ введем отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $x(t) = y(t)$ почти всюду. Множество классов эквивалентности обозначим $L_1(T, \mu)$. Метрика в $L_1(T, \mu)$ задается формулой

$$d([x], [y]) = \int\limits_T |x - y| d\mu = d(x, y).$$

Очевидно, что расстояние определено корректно – замена в интеграле функции x на эквивалентную не меняет интеграла.

УПРАЖНЕНИЕ 7.6.2. Доказать, что $L_1(T, \mu)$ – метрическое пространство.

ТЕОРЕМА 7.6.1. *Пространство $L_1(T, \mu)$ – полное.*

◁ Пусть $[x_n]$ – фундаментальная последовательность в $L_1(T, \mu)$, x_n – последовательность представителей, тогда
$d([x_n], [x_m]) \to 0$. Выберем подпоследовательность номеров $n_k \to$

∞ так, что $d([x_{n_k}],[x_{n_{k+1}}]) < 1/2^k$. Рассмотрим ряд

$$x_{n_1} + \sum_{i=2}^{\infty}(x_{n_i} - x_{n_{i-1}}), \qquad (7.6.1)$$

для которого x_{n_k} является частичной суммой. Ряд, составленный из модулей,

$$|x_{n_1}| + \sum_{i=2}^{\infty}|x_{n_i} - x_{n_{i-1}}| \qquad (7.6.2)$$

состоит из положительных членов. Покажем, что для него выполнены условия следствия 6.7.1. Оценим интегралы от частных сумм

$$\int_T (|x_{n_1}| + \sum_{i=2}^{k}|x_{n_i} - x_{n_{i-1}}|)d\mu \le \int_T |x_{n_1}|d\mu + \sum_{i=2}^{k}\frac{1}{2^i}d\mu \le$$

$$\int_T |x_{n_1}|d\mu + 1.$$

По теореме Б.Леви ряд (7.6.2) сходится почти всюду к интегрируемой функции $\varphi(t)$. Значит, ряд (7.6.1) сходится почти всюду к некоторой функции $x(t)$. Так как

$$|x_{n_k}(t)| \le |x_{n_1})| + \sum_{i=2}^{k}|x_{n_i}(t) - x_{n_{i-1}}(t)| \le \varphi,$$

то по теореме Лебега функция x интегрируема. Поскольку $|x_{n_k}(t) - x(t)| \le 2\varphi(t)$, то $d([x_{n_k}],[x]) = \int_T |x_{n_k} - x|d\mu \to 0$ по той же теореме, т.е. последовательность x_{n_k} сходится к x в метрике L_1. Тогда $d([x_n],[x]) \le d([x_n],[x_{n_k}]) + d([x_{n_k}],[x]) \to 0$ при $n, n_k \to \infty$, т.е. $[x_n] \to [x]$.$\triangleright$

Элементы пространства Лебега $L_1(T,\mu)$ обычно называют функциями, хотя это неточно – пространство состоит из классов функций и обладает далеко не всеми свойствами пространств функций. Например, для элемента $x \in L_1(T,\mu)$ не определено значение в точке t из T, так как x есть класс функций и значение в

точке зависит от выбора представителя из этого класса. Укажем в пространстве $L_1(T,\mu)$ некоторые плотные множества.

(i) Множество простых суммируемых функций. По определению интегрируемая по Лебегу функция является пределом последовательности простых функций.

(ii) Множество простых функций, принимающих конечное число значений. Если простая суммируемая функция $x(t)$ имеет вид $x(t) = y_k$ при $t \in T_k,\ T = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} T_k$, то последовательность функций

$$x_n(t) = \begin{cases} x(t) \text{ для } t \in \bigcup\limits_{k=1}^{n} T_k, \\ 0 \text{ для } t \notin \bigcup\limits_{k=1}^{n} T_k \end{cases}$$

сходится к $x(t)$ в метрике $L_1(T,\mu)$.

ТЕОРЕМА 7.6.2. *Пусть $T = [a,b]$ и μ-мера Лебега. Тогда множество $\mathcal{C}[a,b]$ плотно в пространстве $L_1(T,\mu)$.*

$\triangleleft$ Для доказательства достаточно показать, что в любой окрестности любой функции x из $L_1(T,\mu)$ есть непрерывная функция, т.е. любая функция x может быть сколь угодно точно в метрике $L_1(T,\mu)$ приближена непрерывной функцией. Построим такое приближение поэтапно. Как показано выше, функция x может быть приближена простой функцией, принимающей конечное число значений, т.е. линейной комбинацией характеристических функций измеримых множеств. Согласно теореме 5.6.1 для измеримого множества A существует элементарное множество B такое, что $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$. Тогда $d(\chi_A, \chi_B) < \varepsilon$, т.е. характеристическая функция χ_A измеримого множества A может быть приближена характеристической функцией χ_B элементарного множества B – линейной комбинацией характеристических функций полуинтервалов. Характеристическая функция полуинтервала $[\alpha,\beta)$ с точностью ε в метрике пространства $L_1(T,\mu)$ может быть приближена непрерывной функцией, например, функцией

$$\varphi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0,\ t \le \alpha 0\varepsilon,\ t > \beta + \varepsilon, \\ \frac{t-\alpha-\varepsilon}{\varepsilon},\ \alpha - \varepsilon \le t < \alpha, \\ 1,\ \alpha \le t \le \beta, \\ \frac{\beta+\varepsilon-t}{\varepsilon},\ \beta \le t < \beta + \varepsilon. \end{cases}$$

Таким образом, функция x может быть приближена непрерывной функцией. $\triangleright$

В дальнейшем пространство Лебега $L_1(T,\mu)$, где $T=[a,b]$ и μ-мера Лебега, условимся обозначать символом $L_1(a,b)$.

СЛЕДСТВИЕ 7.6.1. *Пространство* $L_1(a,b)$ *сепарабельно.*

$\lhd$ Любая непрерывная функция на отрезке может быть равномерно приближена многочленом. Многочлен можно приблизить многочленом с рациональными коэффициентами, т.е. множество многочленов с рациональными коэффициентами всюду плотно в $L_1(a,b)$. Так как это множество счетно, пространство $L_1(a,b)$ сепарабельно.

Пусть функция $x\in L_1(T,\mu)$. Положим

$$\|x\|_1=\int_T |x|d\mu.$$

УПРАЖНЕНИЕ 7.6.3. Доказать, что $L_1(T,\mu)$ банахово пространство.

7.7. Пространства Лебега $L_p(T,\mu),\ p>1$

Пусть T – пространство с полной σ-аддитивной конечной мерой μ. Зададим число $1<p<\infty$ и обозначим через $\mathcal{L}_p(T,\mu)$ множество измеримых функций, для которых существует интеграл $\int_T |x|^p d\mu$. В этом множестве введем отношение эквивалентности $x\sim y$, если $x(t)=y(t)$ почти всюду. Множество классов эквивалентных между собой функций обозначим через $L_p(T,\mu)$. На этом множестве зададим метрику формулой

$$d([x],[y])=\left(\int |x-y|^p d\mu\right)^{1/p},$$

где $[x]$ – класс эквивалентных между собой функций, содержащих x (класс функций, эквивалентных x). Очевидно, что $d([x],[y])$ не зависит от выбора представителя из класса $[x]$ и что выполняются аксиомы (i)-(ii) метрики. Прежде чем проверить неравенство треугольника, докажем три вспомогательных неравенства.

ЛЕММА 7.7.1 (НЕРАВЕНСТВО ЮНГА[41]). *Пусть числа* $p>1, q=p/(p-1)$. *Тогда для любых чисел* $a,b\in\mathbf{R}_+$ *справедливо*

[41]Джон Уэсли Юнг (1879-1932) – американский математик. Основное направление исследований – проективная геометрия.

неравенство

$$ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

$\lhd$ Рассмотрим функцию $u(v)=v^{1/(p-1)}$. Тогда как $p>1$, то показатель $1/(p-1)$ положителен и график является выпуклой или вогнутой линией. Проведем через точки с координатами $(0,a)$ и $(b,0)$ прямые, параллельные осям v и u соответственно. Тогда $ab\le s_1+s_2$, где

$$s_1=\int_0^a u^{p-1}du=\frac{a^p}{p},s_2=\int_0^b v^{\frac{1}{p-1}}dv=\frac{b^q}{q}.$$

Получаем искомое неравенство.$\rhd$

Пусть $x\in L_p(T,\mu)$. Положим

$$\|x\|_p=\left(\int_T |x|^p d\mu\right)^{1/p}. \tag{7.7.1}$$

ЛЕММА 7.7.2 (НЕРАВЕНСТВО ГЕЛЬДЕРА[42]). *Пусть числа* $p>1,q=p/(p-1)$. *Тогда для любых функций* $x\in L_p(T,\mu)$, $y\in L_q(T,\mu)$ *их произведение интегрируемо по Лебегу и справедливо неравенство*

$$|\int_T xyd\mu|\le\|x\|_p\|y\|_q.$$

$\lhd$ Пусть $\|x_0\|_p=\|y_0\|_q=1$. Зафиксируем t и применим неравенство Юнга

$$|x_0(t)y_0(t)|\le\frac{|x_0(t)|^p}{p}+\frac{|y_0(t)|^q}{q}. \tag{7.7.2}$$

Проинтегрируем неравенство (7.7.2) и получим

$$\int_T |x_0y_0|d\mu\le\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{7.7.3}$$

[42]Отто Людвиг Гельдер (1859-1937) – немецкий математик. Основные работы посвящены теории групп, теории аналитических функций и теории рядов Фурье.

Если $x=0$ или $y=0$, то неравенство Гельдера очевидно. Если $x\neq 0,\ y\neq 0$, то построим $x_0(t)=\frac{1}{\|x\|_p}x(t), y_0=\frac{1}{\|y\|_q}y(t)$. Подставляя их в неравенство (7.7.3), получаем

$$\frac{1}{\|x\|_p}\frac{1}{\|y\|_q}\int\limits_T |xy|d\mu \le 1.$$

Умножая последнее неравенство на $\|x\|_p\|y\|_q$, получаем требуемое. $\triangleright$

ЛЕММА 7.7.3 (неравенство Минковского[43]). *Пусть число $p>1$. Тогда для любых функций $x,y\in L_p(T,\mu)$ справедливо неравенство*

$$\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y_p\|.$$

$\triangleleft$ Заметим, что при фиксированном t справедлива цепочка неравенств

$$|x(t)+y(t)|^p \le [2\max\{|x(t)|,|y(t)|\}]^p \le$$

$$2^p\max\{|x(t)|^p,|y(t)|^p\} \le 2^p(|x(t)|^p+|y(t)|^p),$$

из которой следует интегрируемость функции $|x(t)+y(t)|^p$. Так как $[|x(t)+y(t)|^{p-1}]q=|x(t)+y(t)|^q$, то функция $|x(t)+y(t)|^{p-1}$ принадлежит $L_q(T,\mu)$. Перейдем к доказательству неравенства

$$\int\limits_T |x+y|^p d\mu = \int\limits_T |x+y||x+y|^{p-1}d\mu \le$$

$$\int\limits_T |x||x+y|^{p-1}d\mu + \int\limits_T |y||x+y|^{p-1}d\mu.$$

Используя неравенство Гельдера, получаем

$$\int\limits_T |x+y|^p d\mu \le \|x\|_p(\int\limits_T |x+y|^p d\mu)^{1/q} +$$

[43] Герман Минковский (1864-1909) – немецкий математик и физик. Основные работы посвящены теории чисел, геометрии, математической физике и гидродинамике.

$$\|y\|_p(\int\limits_T |x+y|^p d\mu)^{1/q}.$$

Разделив неравенство на интеграл, стоящий в правой части, получаем

$$\left(\int\limits_T |x+y|^p d\mu\right)^{1-\frac{1}{q}} \le \|x\|_p + \|y\| + p,$$

что и требовалось доказать.$\triangleright$

УПРАЖНЕНИЕ 7.7.1. Доказать, что пространство $L_p(T,\mu)$, $p>1$ метрическое.

УПРАЖНЕНИЕ 7.7.2. Доказать, что $L_p(T,\mu),\ p>1$ – линейное нормированное. (Норму определить формулой (7.7.1)).

ТЕОРЕМА 7.7.1. *Пространства $L_1(T,\mu),\ p>1$ полные.*

$\triangleleft$ Возьмем произвольную фундаментальную последовательность $x_n\in L_p(T,\mu)$. Пусть $A\subset T$ – произвольное измеримое множество конечной меры. Тогда с помощью неравенства Гельдера получаем

$$\int\limits_A |x_n-x_m|d\mu \le \left(\int\limits_A |x_n-x_m|^p d\mu\right)^{1/p} \times$$

$$\times\left(\int\limits_A 1d\mu\right)^{1/q} \to 0,\ n,m\to\infty.$$

Значит, последовательность x_n есть фундаментальная последовательность в $L_1(A,\mu)$ и, как показано в доказательстве теоремы 7.6.1, существует подпоследовательность, которая сходится почти всюду в A. Проверим, что $x_{n_k}\to x_0$ по метрике пространства $L_p(T,\mu)$. Для $\varepsilon>0$ существует номер $n(\varepsilon)$ такой, что для $k,i\ge n(\varepsilon)$ выполняется

$$\left(\int\limits_T |x_{n_k}-x_{n_i}|^p d\mu\right)^{1/p} \le \varepsilon.$$

Переходя к пределу при $i \to \infty$ по теореме Фату, получаем

$$\left(\int\limits_T |x_{n_k} - x_0|^p d\mu\right)^{1/p} \le \varepsilon,$$

т.е. $d(x_{n_k}, x_0) \to 0$. Значит, и сама последовательность x_n сходится в пространстве $L_p(T,\mu)$.$\triangleright$

Другими словами, все пространства $L_p(T,\mu)$, $p > 1$ являются банаховыми пространствами.

УПРАЖНЕНИЕ 7.7.3. Доказать, что пространство $l_p, p > 1$ банахово.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.7.1. Пусть $T = [a,b]$, а μ – мера Лебега. Положим $L_p(T,\mu) = L_p(a,b)$, $p > 1$. Аналогично теореме 7.6.2 и следствию 7.6.1 можно доказать сепарабельность пространств $L_p(a,b)$, $p > 1$, но на этом мы останавливаться не будем.

7.8. Пространство Лебега $L_2(T,\mu)$

Пусть T – пространство с полной σ-аддитивной конечной мерой μ. Выше было показано, что пространство $L_2(T,\mu)$ – банахово с нормой

$$\|x\|_2 = \left(\int\limits_T |x|^2 d\mu\right)^{1/2}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 7.8.1. Доказать, что формула

$$(x,y) = \int\limits_T xy d\mu$$

задает скалярное произведение в $L_2(T,\mu)$, причем имеет место неравенство Коши - Буняковского

$$|(x,y)| \le \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Очевидно, что норма $\|\cdot\|_2$ порождается скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. В гильбертовых пространствах актуален вопрос о существовании ортонормированных базисов. Мы укажем такие базисы в некоторых конкретных функциональных пространствах.

Для этого условимся, что если $t = [a,b]$ и μ – мера Лебега, то полагать $L_2(T,\mu) = L_2(a,b)$.

В пространстве $L_2(-1,1)$ классическим примером ортонормированного базиса является тригонометрическая система

$$1/\sqrt{2}, \cos \pi t, \sin \pi t, \cos 2\pi t, \sin 2\pi t, \ldots.$$

Ортонормированность системы проверяется непосредственным вычислением. Например,

$$\int\limits_{-1}^{1} \sin k\pi t \, \sin n\pi t \, dt = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} [\cos(k-n)\pi t - \cos(k+n)\pi t] dt =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\,\frac{\sin(k-n)\pi t}{(k-n)\pi}\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\,\frac{\sin(k+n)\pi t}{(k+n)\pi}\Big|_{-1}^{1} = 0, \ k \ne n \\ 1 - \frac{\sin 2n\pi t}{2n\pi}\Big|_{-1}^{1} = 1, \text{ если } k = n. \end{cases}$$

Проверим полноту этой системы. Воспользуемся теоремой Вейерштрасса о том, что любую непрерывную периодическую функцию можно равномерно приблизить тригонометрическим многочленом, т.е. линейной комбинацией функций из рассматриваемой системы. По теореме Вейерштрасса непрерывные функции, удовлетворяющие условию $u(-1) = u(1)$, принадлежат замкнутому подпространству L. Но такие непрерывные функции образуют всюду плотное множество в $L_2(-1,1)$, откуда следует, что $L = L_2(-1,1)$. Коэффициенты при разложении функции x по системе $1/\sqrt{2}, \cos\pi t, \sin\pi t, \cos 2\pi t, \sin 2\pi t, \ldots$, обозначаются соответственно $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$. Таким образом получаем, что любая функция $x \in L_2(-1,1)$ разлагается в классический тригонометрический ряд Фурье, который сходится по норме пространства $L = L_2(-1,1)$

$$x(t) = a_0/\sqrt{2} + a_1 \cos \pi t + b_1 \sin \pi t + a_2 \cos 2\pi t +$$

$$+ b_2 \sin 2\pi t \ldots,$$

где

$$a_0 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x(t)}{\sqrt{2}} dt, \ a_n = \int\limits_{-1}^{1} x(t) \cos n\pi t dt,$$

$$b_n = \int\limits_{-1}^{1} x(t)\sin n\pi t dt,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Система функций $1, t, t^2, \ldots$ линейно независима, но не ортогональна в $L_2(-1,1)$. Используя процесс ортонормализации, получаем ортонормированную последовательность многочленов $P_0(t), P_1(t), \ldots$. Эта система полная, так как порожденное ею замкнутое подпространство совпадает с $L_2(-1,1)$.

Действительно, согласно теореме Вейерштрасса, любая непрерывная функция на отрезке $[-1,1]$ может быть равномерно приближена многочленом, а любой многочлен является линейной комбинацией многочленов $P_n(t)$.

Для многочленов $P_n(t)$ можно получить формулу

$$P_n(t) = \frac{\sqrt{2n+1}}{n!2^n\sqrt{2}}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Эти многочлены лишь постоянными множителями отличаются от многочленов Лежандра[44]:

$$L_n(t) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n.$$

В приложениях чаще используются многочлены Лежандра. Таким образом, любая функция $x \in L_2(-1,1)$ разлагается в ряд

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k L_k(t),$$

где

$$c_k = \frac{2k+1}{2}\int\limits_{-1}^{1} x(t)L_k(t)dt,$$

и ряд сходится по норме $L_2(-1,1)$.

[44]Андриен Мари Лежандр (1752-1833) – французский математик. Основные исследования посвящены теории чисел, математическому анализу и небесной механике.

В пространствах функций двух переменных полные ортонормированные системы можно строить с помощью следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 7.8.1. *Пусть (X,μ_X) и (Y,μ_Y) – пространства с мерами, φ_n – полная ортонормированная последовательность в $L_2(X,\mu_X)$ и ψ_n – полная ортонормированная последовательность в $L_2(Y,\mu_Y)$. На произведении $Z = X\times Y$ рассмотрим меру $\mu_Z = \mu_X \otimes \mu_Y$ и соответствующее пространство $L_2(Z,\mu_Z)$. Тогда произведения $e_{nk}(x,y) = \varphi_n(x)\psi_k(y)$, $k, n = 1, 2, \ldots$, образуют полную ортонормированную систему в $L_2(Z,\mu_Z)$.*

◁ Проверим ортонормированность системы $\{e_{nk}\}$:

$$\int\limits_Z e_{nk}e_{ml}d\mu_Z = \int\limits_X \varphi_n\varphi_m d\mu_X \times$$

$$\times \int\limits_Y \psi_k\psi_l d\mu_Y = \delta_{nm}\delta_{kl} = \begin{cases} 1,\ n = m,\ k = l, \\ 0, n \neq m \text{ или } k \neq l. \end{cases}$$

Проверим полноту системы $\{e_{nk}\}$. Пусть $f \in L_2(Z,\mu_Z)$ и функция f ортогональна всем e_{nk} , т.е. для любых n и k

$$\int\limits_Z f\varphi_n\psi_k d\mu_Z =$$

$$= \int\limits_Y (\int\limits_X f\varphi_n d\mu_X)\psi_k d\mu_Y = 0$$

Так как система ψ_k полна в $L_2(Y,\mu_Y)$, то получаем при фиксированном n, что функция $f_n(y) = \int\limits_X f\varphi_n d\mu_X = 0$ почти для всех y. Поскольку система φ_n полна в $L_2(X,\mu_X)$, имеем почти для всех x $f(x,y) = 0$. Поэтому $\int\limits_X |f|^2 d\mu_X = 0$ почти для всех y и по теореме Фубини

$$\int\limits_Z |f|^2 d\mu_Z = \int\limits_Y (\int\limits_X |f|^2 d\mu_X)d\mu_Y = 0.$$

Значит, $f = 0$ как элемент $L_2(Z,\mu_Z)$ и система $\{e_{nk}\}$ полна. ▷

Итак, гильбертово пространство $L_2(-1,1)$ бесконечномерно и сепарабельно, поскольку имеет счетный ортонормированный базис. Согласно теореме 7.8.1 таким же будет пространство $L_2(T,\mu)$, где $T=[-1,1]^n$ – n-мерный куб в пространстве $\mathbf{R}^n$, а $\mu=\mu_n$ – соответствующая мера Лебега. Бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства обладают одним неожиданным свойством, к изучению которого мы и приступим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.8.1. Пусть $(X,(\cdot,\cdot)_X)$ и $(Y,(\cdot,\cdot)_Y)$ – два гильбертовых пространства. Биективное отображение $J:X\to Y$ называется *изоморфизмом* (гильбертовых пространств), если оно

(i) линейно, т.е. $J(\alpha u+\beta v)=\alpha J(u)+\beta J(v)$ при любых $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ и $u,v\in X$;

(ii) сохраняет скалярное произведение, т.е.

$$(u,v)_X=(J(u),J(v))_Y$$

при любых $u,v\in X$.

ТЕОРЕМА 7.8.2. *Все бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны между собой.*

$\triangleleft$ Достаточно показать, что произвольное бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство X изоморфно пространству l_2. Выберем в пространстве X базис (e_k). Каждому элементу $x\in X$ поставим в соответствие последовательность чисел $\hat{x}=(\hat{x}_k)$ – коэффициентов Фурье элемента x по базису (e_k). В силу теоремы 7.4.3 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\hat{x}_k|^2<+\infty$, т.е. последовательность $\hat{x}\in l_2$. Таким образом, построено отображение $J:H\to l_2,\ Jx=\hat{x}$. Очевидно, что J линейно.

Покажем, что J – изометрия. Если $Jx=0$, то по определению базиса $x=0$. Пусть $a\in l_2$, т.е. $a-(a_1,a_2,...,a_n,...)$, где $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|^2<+\infty$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_ke_k$ сходится в X и, значит, $J(\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_ke_k)=a$. Таким образом, отображение J биективно. Покажем теперь, что J сохраняет скалярное произведение. Действительно,

$$(x,y)_X=(\sum_{k=1}^{\infty}\hat{x}_ke_k,\sum_{j=1}^{\infty}\hat{y}_je_j)=\sum_{j=1}^{\infty}\hat{x}_k\hat{y}_k=(\hat{x},\hat{y})_{l_2}.\triangleright$$

Отсюда сразу вытекает изоморфизм пространств Лебега $L_2([-1,1]^m,\mu_m)$ и $L_2([-1,1]^n,\mu_n)$ при любых $m,n\in\mathbf{N}$.

Список рекомендуемой литературы

1. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Т.1-2. М.: Наука, 1967-1968.
2. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1-3. М.: Наука, 1969.
3. *Курант Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I. М.: Наука, 1970.
4. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Т. I. М.: Наука, 1971.
5. *Грауберг Г., Либ И., Фишер В.* Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Мир, 1971.
6. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т.1. М.: Мир, 1971.
7. *Бицадзе А.В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука , 1972.
8. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. I. М.: Наука, 1973.
9. *Рудин У.* Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.
10. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов В. Х.* Математический анализ. М.: Наука, 1979.
11. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ. Т. I. М.: Высш. шк., 1981.
12. *Зорич В. А.* Математический анализ. Т. I. М.: Наука, 1981.
13. *Хатсон В., Пим Дж.* Приложения функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983.

14. *Антоневич А.Б., Радыно А.В.* Функциональный анализ и интегральные уравнения. Минск: Изд-во "Университетское", 1984.

15. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.

16. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.

17. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. М.: Наука, 1988.

18. *Евграфов М.А.* Аналитические функции. М.: Наука, 1991.

19. *Свиридюк Г.А.* Математический анализ элементарных функций на прямой: Учеб. пособие / Челяб. гос. ун-т. Челябинск, 1992.

20. *Поволоцкий А. И., Свиридюк Г. А.* Одномерный математический анализ элементарных функций: Учеб. пособие / Челяб. гос. ун-т. Челябинск, 1993.

21. *Свиридюк Г.А., Келлер А.В.* Математический анализ. Ч.III: Учеб. пособие / Челяб. гос. ун-т. Челябинск, 2000.