Математический институт имени В. А. Стеклова РАН

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

Тезисы докладов

Суздаль 2014

УДК 517.911/.958
ББК 22.161.6
М43

Редакционная коллегия:

В. В. Козлов,	ответственный редактор, доктор физико-математических наук, академик РАН
А. А. Давыдов,	доктор физико-математических наук, профессор
В. В. Жиков,	доктор физико-математических наук, профессор
Д. В. Трещев,	доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН

В сборник включены тезисы докладов, представленных на Международной конф
по дифференциальным уравнениям и динамическим системам.

Представляет интерес для научных работников, студентов и аспирантов.

ISBN 978-5-98419-055-8

© Коллектив авторов, 20

Программный комитет

- **В. В. Козлов**, председатель (Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия).
- **А. А. Аграчев** (Международная школа высших исследований (SISSA), Триест, Италия).
- **С. М. Асеев** (Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия).
- **А. А. Давыдов**, зам. председателя (Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, Владимир, Россия).
- **В. В. Жиков**, зам. председателя (Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, Владимир, Россия).
- **Л. М. Лерман** (Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия).
- **Д. В. Трещев**, зам. председателя (Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия).

Организационный комитет

- **А. А. Давыдов**, сопредседатель (Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, Владимир, Россия).
- **А. М. Саралидзе**, сопредседатель (Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, Владимир, Россия).
- **А. Д. Изаак** (Федеральное агентство научных организаций, Москва, Россия).
- **М. Ю. Колков** (Администрация Владимирской области, Владимир, Россия).
- **А. Н. Косогоров** (Администрация города Суздаля, Суздаль, Россия).
- **И. А. Петренко**, зам. председателя (Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, Владимир, Россия).
- **А. Н. Печень** (Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия).
- **В. Н. Чубариков** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия).

СОДЕРЖАНИЕ (CONTENTS)

Авербух Ю.В. 19
Детерминированные игры среднего поля. Минимаксный подход

Аджиев С.З., Веденяпин В.В. 20
Энтропия по Больцману и Пуанкаре

Адлай С.Ф. 21
Приложение теории особенностей к исследованию устойчивости решений изопериметрической задачи

Алероев Т.С., Алероева Х.Т. 22
О базисности системы собственных и присоединенных функций оператора, порожденного дифференциальным выражением второго порядка с дробной производной в младшем члене и краевыми условиями типа Штурма-Лиувилля

Аль-Делфи Дж.К.К., Свиридюк Г.А. 23
Уравнение Баренблатта-Желтова-Кочиной с условием Шоуолтера–Сидорова в квазибанаховых пространствах

Аль-Исави Дж.К., Свиридюк Г.А. 25
Линейные уравнения соболевского типа с относительно p-секториальными операторами в квазибанаховых пространствах

Аль Хелли Х.М., Замышляева А.А. 26
Уравнение Буссинеска-Лява в квазибанаховых пространствах

Алтынбеков Ш. 27
Об одной задаче виброконсолидации соленых грунтов и методы ее решения

Андреев А.С., Раков С.Ю. 28
Уравнения Вольтерра в моделировании ПИ- и ПИД-регуляторов

Андриянова Э.Р., Мукминов Ф.Х. 29
Параболическое уравнение с нестепенными нелинейностями в неограниченной области: существование и единственность решения

Арденов А.А., Сачков Ю.Л. 31
Субриманова задача на группе Энгеля

Артамонов Д.В. 31
Многомерное явление Стокса

Ахметьев П.М. 32
Стабильные гомотопические группы сфер как дифференциальные неравенства

Барышева И.В., Калитвин А.С. 33
О мультиспектре многомерных линейных операторов с частными интегралами

Батищева Я.Г., Веденяпин В.В., Мелихов И.В. 34
Прямой и обратный фотофорез, Радиометр Крукса и реактивные силы

Безгласный С.П., Павлов Г.В. 35
Стабилизация движений диска по реологическому основанию

Безродных С.И., Власов В.И. 36
Сингулярная задача Римана-Гильберта в сложных областях

Бирюков О.Н. 37
Формула вычисления энтропии некоторых кос их трёх нитей

Богаевский И.А. 38
Особенности неявного обыкновенного дифференциального уравнения, квадратичного по производной

Борель Л.В., Федоров В.Е. 38
Полугруппа эволюционного уравнения с памятью

Бройтигам И.Н. 40
Спектральный анализ операторов типа Лежандра на оси

Бутковский О.Я., Хрипунова М.Б. 41
Время прогноза и перемешивание в хаотических системах

Вельмисов П.А., Анкилов А.В. 42
Исследование устойчивости решений некоторых классов начально-краевых задач аэрогидроупругости

Вишневская Н.И. 44
Исследование функций Xu

Владимиров А.А., Карулина Е.С. 45
О нижней оценке для минимального собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с краевыми условиями второго типа и ограничениями на потенциал

Вьюгин И.В. 46
Некоторые оценки в задачах над конечным полем и их непрерывные аналоги

Гасников А.В., Двуреченский П.Е. 47
Об универсальности энтропии, как функции Ляпунова и функции, описывающей концентрацию инвариантной меры

Голубева В.А. 49
Функции гипергеометрического типа от двух комплексных переменных

Гринес В.З. 49
Классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов с двумерным неблуждающим множеством

Гуревич Е.Я. 50
О включении в поток и топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла

Деркунова Е.А. 51
Об асимптотике решения уравнения в частных производных первого порядка в случае смены устойчивости

Дерр В.Я., Ким И.Г. 52
Дифференциальное уравнение с обобщенными функциями в коэффициентах

Дерунова Е.В. 54
Применение редукции в исследовании периодических колебаний сегнетоэлектрических фаз кристалла в задачах с двойными резонансами

Деундяк В.М. 55
Двумерные однородные интегральные операторы сингулярного типа в слоях и алгебры Дугласа-Сарасона

Джалилов А.А., Сафаров У.А. 56
Сингулярные сопряжения кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности с особенностями

Довбыш С.А. 57
Неинтегрируемость многомерных систем: трансверсальное пересечение сепаратрис и подход, основанный на квазислучайных движениях

Долов М.В., Круглов Е.В. 58
О числе линейных частных интегралов алгебраических дифференциальных уравнений

Евдокименков В.Н., Ким Р.В., Воронов А.А., Якименко А.В. 59
Индивидуально-адаптированная вероятностная оценка состояния летательного аппарата в процессе эксплуатации

Есина А.И. 61
Дельта-образные решения задачи Коши для уравнения индукции с полем скоростей, испытывающим тангенциальный разрыв

Жукова Е.Е. 61
О двумерных распределениях времени пребывания винеровского процесса

Жура Н.А. 62
Геометрия характеристической поверхности, фундаментальное решение и задача Коши для одного класса нестрого гиперболических систем первого порядка

Жура Н.А., Митин С.П. 63
О задаче Коши для системы уравнений трансверсально изотропной упругой среды

Загребина С.А., Конкина А.С. 63
Об одной стохастической эволюционной модели

Закирова Г.А., Кириллов Е.В. 64
Постановка обратной спектральной задачи для оператора Лапласа на сфере

Замышляева А.А., Бычков Е.В. 65
Полулинейное уравнение соболевского типа высокого порядка

Звягин М.Ю., Прокошев В.В., Скляренко В.А. 67
Использование дискретных функций Уолша при анализе свойств телекоммуникационных сетей

Зернов А.Е., Келюх И.В. 68
О некоторых гибридных систем функционально-дифференциальных уравнений

Зернов А.Е., Кузина Ю.В. 69
Асимптотики решений некоторых сингулярных систем дифференциальных уравнений

Зубова С.П., Раецкая Е.В. 69
О существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения с нётеровым оператором под знаком производной

Иванова Н.Д. 70
Нелинейная задача идентификации для вырожденного эволюционного уравнения

Имайкин В.М. 71
Гамильтонова теория вращающегося заряда, взаимодействующего с полем Максвелла

Иноземцев А.И. 73
Об оператор-функциях с многомерными частными интегралами в некоторых функциональных пространствах

Ипатова В.М. 74
Задача усвоения данных для трехмерной модели океана с квадратичной плотностью

Исаенкова Н.В. 75
Эндоморфизмы ветвленных одномерных многообразий

Калитвин А.С. 76
Об интегро-дифференциальных уравнениях Барбашина с дробной частной производной

Калитвин А.С., Трусова Н.И. 77
О разрешимости систем уравнений Вольтерра с частными интегралами в $C^{(1),n}(D)$

Калитвин В.А. 78
Об одном методе численного решения уравнений с частными интегралами

Канатников А.Н., Крищенко А.П. 80
Задача локализации инвариантных компактов для непрерывных систем с неопределенностями

Капкаева С.Х. 81
О топологической классификации градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей с одномерными инвариантными множествами

Карачик В.В. 82
О полиномиальных решениях задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре

Кац Д.С. 84
Построение асимптотик решений дифференциальных уравнений с вырождениями в коэффициентах

Киселев О.М. 85
Захват в резонанс в потенциальной яме

Кожевникова Л.М., Хаджи А.А. 87
О решениях эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях

Колпакова Е.А. 88
Обобщенное решение системы квазилинейных уравнений

Кондратьева Л.А. 90
Об устойчивых предельных циклах трёхмерных динамических систем

Кондюков А.О., Сукачева Т.Г. 91
Квазистационарные полутраектории в одной модели магнитогидродинамики

Конечная Н.Н. 92
Об аналоге теоремы Орлова для дифференциальных операторов четвёртого порядка с сингулярными коэффициентами

Коровина М.В. 93
Применение метода повторного квантования к построениям асимптотик решений уравнений с полиномиальными вырождениями в коэффициентах

Костромина О.С. 94
О сложном поведении решений уравнения Дюффинга–Ван дер Поля при периодических по времени возмущениях

Кудряшов Н.А. 95
Специальные решения уравнений иерархий Кортевега - де Вриза, Каупа - Купершмидта, Кодри - Додда - Гиббона и Форди - Гиббонса

Кудряшов Н.А., Синельщиков Д.И. 96
Аналитическое исследование уточненных математических моделей для описания волн в жидкости с пузырьками газа

Куликов А.Н., Куликов Д.А. 97
Локальные бифуркации в периодической краевой задаче для уравнения Курамото-Сивашинского

Курлыкова Л.И. 98
Оценки функции Грина для оператора теплопроводности в шаре

Лапшина М.Г. 99
Преобразования Радона-Киприянова весовых лебеговых классов финитных функций

Ларина Я.Ю. 100
Статистически инвариантные множества и статические характеристики периодических систем

Левенштам В.Б. 102
Предельный переход в высокочастотной задаче конвекции

Левченко Ю.А. 103
Диффеоморфизмы 3-многообразий с одномерными базисными множествами на 2-торах

Лексин В.П. 104
Регуляризация несобственных интегралов и решения линейных мероморфных дифференциальных уравнений

Логинов Б.В., Русак Ю.Б., Ким-Тян Л.Р. 105
Дифференциальные уравнения с вырожденным,линейно зависящим от неизвестного,оператором при производной

Ляхов Л.Н., Половинкин И.П., Шишкина Э.Л. 106
Соотноения Агейрссона-Киприянова для общего ультрагиперболического уравнения

Макаренко А.В. 108
Исследование дискретных отображений в терминах символического CTQ-анализа

Макаренков О.Ю. 109
Бифуркация предельных циклов из сингулярности типа складка-складка в разрывных дифференциальных уравнениях

Мальцева С., Черевко А., Чупахин А., Акулов А. 110
Восстановление строения сети кровеносных сосудов головного мозга по данным высокопольного ЯМР-томографа

Манакова Н.А. 111
Модель Баренблатта – Желтова – Кочиной с условием Шоуолтера – Сидорова и аддитивными «шумами»

Мартынова А.А. 113
Необходимое условие стабилизации к нулю решений задачи Дирихле для дивергентных параболических уравнений

Мартынова И.С. 114
Периодические решения дифференциальных уравнений с вырожденными бифуркационными функциями

Мастерков Ю.В. 115
Условия позиционной управляемости вдоль оптимальной траектории

Матвеева О.П. 115
Фазовое пространство однородной модели динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости ненулевого порядка

Медведев Ю.А. 116
Новые управляющие и исполнительные устройства многодвигательных электрогидравлических приводов систем автоматического управления

Медведев Ю.А., Давыдова Л.В. 117
Математическое и машинное моджелирование многодвигательных электрогидавлических приводов

Мещеряков В.В., Хэкало С.П. 119
Операторы Дункла над конечным полем

Мирзоев К.А. 120
Операторы Штурма-Лиувилля

Митрякова Т.М. 120
Энергетическая функция для структурно устойчивых диффеоморфизмов с нетривиальными одномерными базисными множествами на поверхностях

Михайлова А.В., Черевко А.А., Чупахин А.П., Кривошапкин А.Л., Орлов К.Ю. 121
Построение гемодинамической модели по экспериментальным клиническим данным

Мойсеянчик В.И. 122
О стандартной гипотезе для некоторых комплексных эллиптических 6-мерных многообразий

Муангу Ж.Э. 123
Оживлённая формула Валлиса

Назайкинский В.Е. 124
Асимптотические решения волнового уравнения с быстроосциллирующими коэффициентами

Никишкин В.А. 124
О задаче Дирихле в слое

Николаев В.Г. 125
О единственности решения задачи Шварца для некоторых типов матриц

Никольская О.В. 126
Об алгебраических циклах на гладкой модели расслоенного произведения семейств К3 поверхностей с вырождениями рационального типа

Пазий Н.Д. 128
Нормальные формы систем с ограничениями с impasse-особенностями бесконечного индекса

Панов Е.Ю. 128
О стабилизации почти-периодических энтропийных решений скалярных законов сохранения

Пастухова С.Е., Тихомиров Р.Н. 129
Замечание о формулах повторного усреднения

Перегудова О.А. 131
Стабилизация нестационарных систем с дискретным управлением

Петрова Л.И. 132
Особенность решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса

Плеханова М.В., Байбулатова Г.Д. 133
Задача Коши для квазилинейного уравнения, не разрешимого относительно производной по времени

Половинкина М.В. 133
О весовых функциональных пространствах $B^{\gamma}_{p,k}$

Потапов В.И. 135
Визуализация фазовых траекторий и колебательных режимов в прикладных диссипативных динамических системах

Починка О.В. 136
О существовании некомпактных гетероклинических кривых у полярных каскадов на простых многообразиях

Прохоренко В.И. 136
О применении качественных методов теории возмущений для решения практических задач космической баллистики

Прохорова Т.В. 138
О группе Брауэра и гипотезе Тэйта для дивизоров на арифметической модели К3 – поверхности

Пугина Л.В., Волосов К.А. 139
Асимптотические решения и "пульсирующие"режимы свертывания крови

Пулькина Л.С. 141
Задача с нелокальным условием для псевдогиперболического уравнения

Радкевич Е.В. 142
Об одной задаче Лакса (внутренняя турбулентость)

Раецкая Е.В., Зубова С.П. 142
Построение управления для полностью наблюдаемой системы, моделирующей работу нагревательной печи

Расулов А.Б. 143
Уравнения произвольного порядка с оператором Коши-Римана и с сильными особенностями в коэффициентах

Рашид А.С., Свиридюк Г.А. 145
Линейные уравнения соболевского типа с относительно p-радиальными операторами в квазибанаховых пространствах

Родина Л.И. 146
Условия инвариантности и вырождения для вероятностной модели популяционной динамики

Романов А.В. 148
Инерциальные многообразия параболических уравнений

Рощупкин С.А. 149
Псевдодифференциальные операторы Киприянова-Катрахова с негладкими символами

Рузакова О.А., Золотарева Е.А. 151
Об управляемости начально-конечной задачи для уравнения соболевского типа с (L, p)-ограниченным оператором

Савчук А.М. 152
Некоторые теоремы об интерполяции нелинейных отображений

Сагадеева М.А. 153
Об оптимальном управлении решениями одного нестационарного уравнения соболевского типа

Садовничая И.В. 154
Об асимптотических формулах для собственных значений и собственных функций системы Дирака

Сакбаев В.Ж. 155
О явлении взрыва решений дифферециальных уравнений и случайных полугруппах

Сафонова Т.А. 155
О квазирегулярности дифференциального оператора четвёртого порядка с сингулярными коэффициентами

Сахаров А.Н. 156
Функции Ляпунова и топологическая классификация потоков Морса-Смейла

Сачкова Е.Ф. 157
Анормальные траектории в субримановой задаче с вектором роста (2, 3, 5, 8)

Сидоров Е.А., Папшева Е.А. 158
О некоторых случаях в задаче о периодических решениях дифференциальных уравнений с частными производными

Сильченко П.Н., Кудрявцев И.В., Михнев М.М. 160
Подходы к решению системы дифференциальных уравнений для элемента волноводного тракта космических аппаратов

Сиражудинов М.М., Пастухова С.Е., Джамалудинова С.П. 162
Метод асимптотических разложений для системы уравнений Бельтрами

Солдатов А.П. 163
О разрешимости задачи Дирихле на двумерных стратифицированных множествах

Сурначёв М.Д. 164
Нелинейные параболические уравнения, вырождающиеся на части области

Тарасенко В.И., Костерин А.Б., Стариков А.Н. 165
Регулирование давления газа как динамическая задача

Тельнова М.Ю. 166
Об одной оценке сверху первого собственного значения задачи Штурма-Лиувилля с интегральным условием на потенциал

Теодорович Э.В. 167
Точное автомодельное решение одного нелинейного уравнения (ренормгрупповой подход)

Тихомирова С.В. 169
Об одной оценке для усреднённой матрицы

Тюрин В.М. 170
Об одном неравенстве для линейных дифференциальных операторов

Фаддеев Л.Д. 171
Новая жизнь интегрируемости

Фильченков А.С. 171
Косое произведение на n-мерной клетке ($n \geq 2$), имеющее n-мерный топологически транзитивный аттрактор, не обладающий свойством полной топологической транзитивности

Хаммади А.Х. 172
Статические характеристики линейной управляемой системы со случайными коэффициентами

Хасан Ф.Л., Свиридюк Г.А. 174
Экспоненциальные дихотомии решений уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной в квазибанаховых пространствах

Хлопин Д.В. 176
О функции цены в задачах управления на бесконечном промежутке

Хрипунова Балджы А.С. 177
О вариационном замыкании одного класса интегрантов с нестандартными условиями роста

Худайгулыев Б.А. 178
О существовании положительных решений уравнения теплопроводности с сингулярным потенциалом

Цылин И.В. 179
Непрерывность собственных значений Лапласа-Бельтрами на областях удовлетворяющих равномерному условию конуса

Чернышев В.Л., Толченников А.А. 180
Число гауссовых пакетов на декорированных графах: связь с энтропией газа Бозе-Маслова

Черябкин А.П. 180
Геометрические решетки в пространствах постоянной положительной и отрцательной кривизны

Чечкин Г.А., Чечкина Т.П. 181
Концентрированные массы и эффект "толстой кожи"

Шамолин М.В. 182
Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере

Шафаревич А.И. 183
Квазиклассические спектральные серии оператора Шредингера с дельта-потенциалом на двумерных и трехмерных поверхностях

Шиловская А.А. 183
Структура многообразия, допускающего диффеоморфизмы с двумерными экспансивными аттракторами и репеллерами

Щенников А.В., Щенников В.Н. 184
Оценка погрешности линеаризации нелинейной системы с учетом ее структурных изменений

Эбель А.А. 186
О задаче смешанного управления для уравнения леонтьевского типа

Эглит М.Э., Якубенко А.Е., Якубенко Т.А. 187
Численное исследование нестационарных потоков неньютоновских жидкостей

Юрьева О.Д. 188
Математические модели динамики биологических систем с учетом последействия

Якубович Д.А. 189
Галеркинские приближения для задач с p-Лапласианом

Astashov E.A. 190
On A_k-singularities on curves and surfaces of fixed degree, multi-degree or quasi-degree

Astashova I.V. 191
Asymptotic Classification of Solutions to a Third-Order Singular Emden-Fowler Type Equation

Bel'mesova S.S. 193
Sharkovskii problems for the invariant triangle of one trace map

Belykh V.N. 194
A family of multidimensional systems having a wild attractor

Beschastnyi I.Yu. 195
Almost-Riemannian geometry of the two-sphere

Bolotin S. 196
Shilnikov lemma for a nondegenerate critical manifold of a Hamiltonian system

Borevich E. Z. 196
Bifurcation of solutions of the basic equations for carrier distributions in semiconductors

Bortakovskii A.S., Konovalova A.A. 197
Synthesis of Optimal Discrete Automaton-Type Systems

Cai Q., Huang T., Sachkov Yu.L., Yang X. 197
Sub-Lorentzian Geodesics in the Engel group

Choque-Rivero A.E. 198
Construction of admissible bounded controls via trigonometric moment problem

Davydov A.A., Nassar A.F. 199
Stationary state of exploited population with asymmetric intraspecific competition

Dzhalilov A.A., Begmatov A.S. 200
Renormalizations of the family of circle maps with break points

Dobrokhotov S.Yu. 201
Maslov Canonical Operator, one Hörmander Formula and Localisation of the Berry-Ballagh-Bessel solutions in the Beam Theory

Dryuma V.S. 202
Lax-pairs for Euler equations and their integration

Dudnikova T.V. 204
On the convergence to a statistical equilibrium for the wave equations coupled to a particle

Efremova L.S. 205
Integrability → Skew Products → Trace Maps

Enin A.I. 206
The multiplicity of positive solutions to a quasilinear Neumann problem in 3D ball

Gaiko V.A. 206
Towards Theory of Liénard Polynomial Systems

Gonchenko A.S. 208
Lorenz-like attractors in a nonholonomic model of a Rattleback

Karabanov A.A., Morozov A.D. 208
Degenerate resonances in Hamiltonian systems with two degrees of freedom

Karpenkov O. 209
Toric singularities and lattice trigonometry

Kazakov A.O. 209
Figure-eight attractor in the nonholonomic model of an unbalanced ball moving on the plane

Kolonitskii S.B. 210
Existence of vector solutions to the generalized Ginzburg-Landau system

Komech A.I. 211
Attractors of nonlinear Hamilton PDEs

Konovalova A.A. 212
Optimal Injection of a Satellite into Geostationary Orbit

Koptev A.V. 212
Structure of Solution for 3D Navier — Stokes Equations

Kopylova E.A. 214
Dispersion estimates for discrete equations

Koutvitsky V.A., Maslov E.M. 216
Asymptotic solutions of the Hill equation with a slowly varying parameter

Kulagin N.E., Lerman L.M. 217
On dynamics of slow varying Duffing-type system

Kuznetsov I. 218
On the existence and the uniqueness of entropy solutions to forward-backward parabolic equations

Lipatov M. 219
On cocycles with values in real-rank 1 semisimple Lie groups

Mashtakov A.P. 219
Analysis of cusps and characterization of the existence set in an association field model on the retinal sphere

Miller B., Rubinovich E. 220
Mechanical systems with impacts and friction. Painlevé problem

Miroshnikova E.I. 222
Boundedness of integral operators with homogeneous kernels in weighted L_p–spaces

Nazarov A.I. 223
Sharp constants in the "boundary" Poincaré inequality

Neishtadt A.I. 223
On mechanisms of destruction of adiabatic invariance

Palis S. 224
Discrepancy based control of population balance models

Panasenko G.P. 225
High order homogenization and dimension reduction for elastic and viscoelastic rods and plates

Pankratova E.V. 225
Bifurcations and attractors in a system of nonlinear oscillators inertially coupled by a common base

Pechen A.N. 226
Quantum stochastic differential equation for open quantum systems in the low density limit

Pegachkova E.A. 227
An Aircraft Motion Control Synthesis at Horizontal Flight with Minimal Fuel Consumption

Piskarev S.I. 227
Compactness in fractional evolution equations

Rudakov I.A. 229
Infinitely many periodic solutions for the quasylinear equation of forced beam vibration

Runge V. 230
Optimal control by multipoles in Hele-Shaw problem

Ryabov P.E. 230
On the problem of detecting critical subsystems for the generalized two-field gyrostat

Sazhenkov S.A. 232
The Homogenization of a Thermoviscoelastic Kelvin – Voigt Material beyond the Periodic Setting

Sergeev A.G. 232
Harmonic Spheres and Yang–Mills Fields

Sultanov O.A. 233
The capture into autoresonance under the presence of noise

Treschev D.V. 233
Separatrix map in Hamiltonian dynamics

Vlasov V.V., Rautian N.A. 233
On the spectral properties of integro-differential operators arising in the viscoelasticity theory

Wlodarczyk J. 234

Weierstrass-Hironaka division theorem for analytic and smooth functions

Zaitsev V.A. 235

Sufficient conditions for stabilization of discrete-time affine systems

Zhukova N.I. 235

Transverse invariants of conformal foliations

Zhuzhoma E. 236

On diffeomorphisms with solenoidal invariant sets

Детерминированные игры среднего поля. Минимаксный подход[1]

Авербух Ю.В. (Россия)
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
ayv@imm.uran.ru

Игры среднего поля – относительно новая часть теории игр, предложенная Lasry, Lions [1], [2] и независимо Huang, Caines, Malhamé [3]. Игры среднего поля исследуют ситуацию взаимодействия однотипных игроков в случае, когда каждый игрок рассматривает всех остальных обезличенно. С математической точки зрения предполагается, что в уравнение динамики и в функционал платы каждого игрока положение остальных игроков входит симметрично, т.е. имеет место зависимость от взвешенной суммы мер Дирака. В силу однотипности игроков можно считать, что цена игры не зависит от номера игрока. Переход к пределу при числе игроков стремящимся к бесконечности даст пару уравнений: первое уравнение – это уравнение Гамильтона-Якоби (уравнение Беллмана), которое в детерминированном случае имеет вид:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(t, x, \mu(t, \cdot), \nabla V) = 0, \quad V(T, \cdot) = \sigma(\cdot), \tag{1}$$

второе уравнение – кинетическое уравнение: $\forall \phi \in C_1(\mathbb{R}^n)$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\mu(t, dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla_p H(t, x, \mu(t, \cdot), \nabla_x V), \nabla_x \phi(x) \rangle \mu(t, dx), \quad \mu(0, \cdot) = m_0(\cdot). \tag{2}$$

Здесь $\nabla_p = (\partial/\partial_{p_1}, \ldots, \partial/\partial_{p_n})$, $\nabla_x = (\partial/\partial_{x_1}, \ldots, \partial/\partial_{x_n})$. В системе неизвестны: V – функция позиции и μ – поток мер, т.е. функция определенная на декартовом произведении отрезка $[0, T]$ и борелевской σ-алгебры на $\mathbb{R}^n$, $\mu(t, \cdot)$ – мера на $\mathbb{R}^n$.

В литературе наиболее исследован стохастический случай. Детерминированный случай рассматривается преимущественно в случае суперлинейного роста по фазовой переменой (и при некоторых других существенных условиях). Сложности в изучении детерминированного случая связаны с тем, что в коэффициенты кинетического уравнения входит производная решения уравнения Гамильтона-Якоби, а в детерминированном случае решение уравнения Гамильтона-Якоби, вообще говоря, недифференцируемо [4].

Пару (V, μ) назовем *обобщенное (минимаксное) решение* системы (1), (2), если

1. V – минимаксное решение уравнения (1) (определение минимаксного решения уравнения Гамильтона-Якоби см. в [4]);
2. $\mu(0, \cdot) = m_0(\cdot)$, и существует мера χ_0 на $\mathcal{S}[V, \mu]$ такая, что для всех $\phi \in C_1[0, T]$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\mu(t, dx) = \int_{\mathcal{S}[V,\mu]} \phi(x(t))\chi_0(d(x(\cdot), z(\cdot))).$$

Здесь $\mathcal{S}[V, \mu]$ – множество выживающих в графике функции V решений дифференциального включения

$$(\dot{x}, \dot{z}) \in \{(\xi, \zeta), H^*(t, x, \mu, \xi) < \infty, \quad \zeta = H^*(t, x, \mu, \xi)\}.$$

Через $H^*(t, x, \mu, \xi)$ обозначена сопряженная к H функция по s.

В работе будет рассказываться о теореме существования обобщенного решения и о построении приближенного равновесия по Нэшу в игре конечного числа лиц.

Литература

[1] Lasry J.-M., Lions P.-L. Jeux champ moyen. I. Le cas stationnaire. (French) // C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 2006, Vol. 343, N. 9, pp. 619-625.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №12-01-00537 и №13-01-90414)

[2] Lasry J.-M., Lions P.-L. Jeux champ moyen. II. Horizon fini et contrle optimal. (French) // C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 2006, Vol. 343, N. 10, pp. 679-684.

[3] Huang M., Caines P.E., Malhame R.P. Large population stochastic dynamic games: closedloop McKean-Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle. Communication in information and systems. 2006, Vol. 6, No. 3, pp. 221-252.

[4] Субботин А.И. Обобщенные решения уравнения в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации – М.–Ижевск, ИКИ, 2003. 335 с.

Энтропия по Больцману и Пуанкаре

Аджиев С.З. (Россия)
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
adzhiev@nm.ru

Веденяпин В.В. (Россия)
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
vicveden@yahoo.com

Рассмотрим уравнение неразрывности или уравнение Лиувилля для динамической системы $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} \in R^n$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + div\left(\mathbf{v}(\mathbf{x})\, f\right) = 0. \tag{1}$$

Определим среднее по Чезаро решения уравнения (1): $f^C(\mathbf{x}) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(t,\mathbf{x})\, dt$.

Уже в 1906 году в работе [1] А. Пуанкаре показал на примерах, что, хотя энтропия сохраняется для уравнения Лиувилля, энтропия среднего по Чезаро больше или равна (как правило, больше) энтропии начального распределения. Эта новая форма H-теоремы была доказана В.В. Козловым и Д.В. Трещевым [2] для уравнения Лиувилля для произвольной гамильтоновой системы. В [3] было показано, что в случае, когда $div\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$, решение уравнения Лиувилля сходится «туда, куда надо» – средние по Чезаро совпадают с экстремалями по Больцману, т.е. определяются принципом условного максимума энтропии (принципом Больцмана).

Рассмотрим обобщение теоремы из [3]. Пусть существет стационарное решение уравнения Лиувилля (1): $\xi(\mathbf{x})$, положительное для всех $\mathbf{x} \in R^n$. В этом случае теорема о совпадении среднего по Чезаро с экстремалью по Больцману проще всего получается в пространстве ${}_\xi L^2(R^n)$ со скалярным произведением $(g,h)_\xi \equiv \int\limits_{R^n} \frac{g(\mathbf{x})h(\mathbf{x})}{\xi(\mathbf{x})} d\mathbf{x}$. Это пространство функций $h(\mathbf{x})$ таких, что $\frac{h^2(\mathbf{x})}{\xi(\mathbf{x})}$ интегрируема по Лебегу, т.е. существует интеграл $\|h\|^2_{{}_\xi L^2} \equiv \int\limits_{R^n} \frac{h^2(\mathbf{x})}{\xi(\mathbf{x})} d\mathbf{x}$, который даёт квадрат нормы функции $h(\mathbf{x})$ в ${}_\xi L^2(R^n)$. В качестве энтропии для (1) требуется строго вогнутый функционал, не убывающий на (1). Энтропией для (1) является сохраняющийся на решениях уравнения Лиувилля функционал

$$S(h) = \int \xi \phi(h/\xi)\, d\mathbf{x}, \tag{2}$$

определённый на функциях $h(\mathbf{x}) \geqslant 0$ из ${}_\xi L^2(R^n)$, где ϕ – строго вогнутая функция.

Определим пространство $I \subset {}_\xi L^2(R^n)$ линейных законов сохранения для (1): $I \equiv \{q \in {}_\xi L^2(R^n) : (q, f(t,\cdot))_\xi = const$ на решениях $f(t,\mathbf{x})$ уравнения $(1)\}$. Рассмотрим задачу Коши для (1) с положительными начальными условиями $f(0)$ из ${}_\xi L^2(R^n)$. Рассмотрим экстремаль Больцмана $f^B = f^B(f(0,\mathbf{x}))$ как функцию, где достигается максимум энтропии (2) при

фиксированных законах сохранения: $S\left(f^B\right) = \max S\left(h\right)$ на множестве $L\left(I, f\left(0,\mathbf{x}\right)\right) = \{h \in {}_\xi L^2\left(R^n\right), h \geqslant 0$: $\left(q\left(\mathbf{x}\right), h\left(\mathbf{x}\right) - f\left(0,\mathbf{x}\right)\right)_\xi = 0\ \forall q \in I\}$.

Теорема. Пусть на множестве $L\left(I, f\left(0,\mathbf{x}\right)\right)$ энтропия (2) непрерывна, ограничена сверху, и если $L\left(I, f\left(0,\mathbf{x}\right)\right)$ неограниченно, то $\lim\limits_{\substack{\|f\|_{{}_\xi L^2} \to +\infty \\ f \in L\left(I, f\left(0,\mathbf{x}\right)\right)}} S\left(f\right) = -\infty$.

Тогда: 1) экстремаль Больцмана существует и единственна на $L\left(I, f\left(0,\mathbf{x}\right)\right)$;

2) среднее Чезаро и экстремаль Больцмана совпадают: $f^C = f^B$.

В силу теоремы о совпадении среднего по Чезаро с экстремалью по Больцману последняя не зависит от ϕ в функционале энтропии. Получена теорема о явном виде экстремали по Больцмана, которая также это демонстрирует. Эти теоремы делают понятие экстремали Больцмана общематематическим и фундаментальным и как метод поиска стационарных решений широкого класса уравнений как линейных типа уравнения Лиувилля, так и нелинейных, и как широкое обобщение понятия энтропии. При этом определяющую роль здесь играют линейные законы сохранения. Мы получили точные формулы для размерности пространства линейных инвариантов для уравнения Лиувилля с дискретным временем для круговой модели Марка Каца, а значит, и такую важную характеристику как размерность пространства стационарных решений.

Литература

[1] Пуанкаре А. Замечания о кинетической теории газов // Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 3. М., 1974.

[2] Козлов В.В., Трещев Д.В. Слабая сходимость решений уравнения Лиувилля для нелинейных гамильтоновых систем // ТМФ, 134:3. 2003, с. 388-400.

[3] Веденяпин В.В. Временные средние и экстремали по Больцману // ДАН, 2008. Т. 422. № 2. С. 161–163.

Приложение теории особенностей к исследованию устойчивости решений изопериметрической задачи

Адлай С.Ф. (Россия)
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН
SemjonAdlaj@gmail.com

Широкоизвестные «задача Дидоны» и «задача о цепной линии» не являются подлинно изопериметрическими задачами, вопреки такому их толкованию. Форма кривой (полуокружность для первой задачи и гиперболический косинус для второй) не зависит от конкретных (начальных) данных (ни в той, ни в другой задаче). Мы же рассмотрим подлинно изопериметрическую задачу о равновесии нити в линейном параллельном силовом поле, где форма кривой, соответствующей решению задачи, зависит (существенным образом) от множителя Лагранжа, который (в свою очередь) зависит от длины и натяжения нити. В случае параллельного силового поля отталкивания, пропорционального (по модулю) расстоянию от (фиксированной) плоскости, число решений зависит от расположения точек крепления концов нити и её длины. Первичное исследование условий устойчивости решений, в случае крепления концов нити в точках исчезновения сил, было проведено Пожарицким. Дальнейшее исчерпывающее исследование потребовало обстоятельного развёртывания аппарата эллиптических функций для последующего вычисления скобки Пуассона от двух функций, зависящих от одного (общего) параметра. Построение функции сопряжённости сводится к построению кривой сопряжённости – кривой пересечения поверхности, представителя параметризованного семейства поверхностей, вложенных в трёхмерное евклидово пространство, с огибающей семейства поверхностью. Такое (геометрическое) построение

опирается на наличие сингулярности у представителя семейства, не разрушающейся при его «шевелении» (такая сингулярность именуется зонтиком Уитни).

О базисности системы собственных и присоединенных функций оператора, порожденного дифференциальным выражением второго порядка с дробной производной в младшем члене и краевыми условиями типа Штурма-Лиувилля

Алероев Т.С. (Россия)
Национальный исследовательский Университет
Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ)
aleroev@mail.ru

Алероева Х.Т. (Россия)
Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ)
BinSabanur@gmail.com

В [1] было показано, что оператор A, порожденный дифференциальным выражением

$$l(u) = u'' + c(x)D^{\alpha}_{0x}u$$

и краевыми условиями

$$u(0) = 0, u(1) = 0,$$

где D^{α}_{0x}– оператор дробного (в смысле Капуто) дифференцирования порядка $0 < \alpha < 1, c(x) \in C[0,1]$, является келдышевским оператором [2]. Из чего следовала полнота системы собственных и присоединенных функций оператора A.

Работа [3] также посвящена исследованию келдышевских операторов, где установлена базисность системы собственных и присоединенных функций этих операторов, в частности, из результатов полученных в [3] следует базисность системы собственных функций оператора A.

В данной работе методом конечных разностей исследуется задача

$$u'' + D^{\alpha}_{0x}u + \lambda u = 0, \tag{1}$$

$$u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = 0, \tag{2}$$

$$u(1)\cos\beta + u'(1)\sin\beta = 0. \tag{3}$$

Пусть $u(x,\lambda)$ - решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0) = \sin\alpha, \tag{4}$$

$$u'(0) = -\cos\alpha = 0. \tag{5}$$

Тогда, функция $u(x,\lambda)$, очевидно, удовлетворяет условию (2). Обозначим через n произвольное натуральное число, и пусть $h = 1/n$. Выпишем разностный аналог для уравнения (1).

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i}{h^2} + \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{k=1}^{i}(u_k - u_{k-1})\Delta S^{\alpha}_{i-k} - \lambda u_i = 0, \tag{6}$$

$$(i = 0, 1, 2, 3, ..., n-1),$$

где $S^{\alpha}_{k} = k^{1-\alpha}$, $u_{-1} = u_0(1 + h\operatorname{ctg}\alpha)$, $u_n = u_{n-1}(1 - h\operatorname{ctg}\beta)$.

Существенным здесь является следующее утверждение:

Лемма. Все собственные значения системы (6) простые.

Литература

[1] Алероев Т. С. //Дифференциальные уравнения, том 25, №11, стр. 1996-1997. 1989 г.

[2] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука. 1965. С. 448.

[3] Ларионов Е.А., Зверяев Е.М., Алероев Т.С. К теории слабого возмущения нормальных операторов. //Препринт ИПМ № 14, Москва, 2014 г.

Уравнение Баренблатта-Желтова-Кочиной с условием Шоуолтера–Сидорова в квазибанаховых пространствах

Аль-Делфи Дж.К.К. (Россия)
Южно-Уральский государственный университет (НИУ)
rassian71@mail.ru

Свиридюк Г.А. (Россия)
Южно-Уральский государственный университет (НИУ)
sviridyuk@74.ru

Хорошо известным примером квазибанаховых пространств служат пространства последовательностей ℓ_q, $q \in (0,1)$ (при $q \in [1,+\infty)$ пространства ℓ_q — банаховы). В [1] введены в рассмотрение *квазибанаховы пространства* ℓ_q^m, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$. Это пространства последовательностей $u = \{u_k\} \subset \mathbb{R}$ с квазинормой

$$ {}^m_q\|u\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k| \right)^q \right)^{1/q}, $$

где $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}$ — монотонная последовательность такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Заметим, что пространства ℓ_q^m при $q \in \mathbb{R}_+$ — квазибанаховы, и банаховы при $q \in [1,+\infty)$. Кроме того, имеют место плотные и непрерывные вложения $\ell_q^n \hookrightarrow \ell_q^m$ при $n \geqslant m$ и $q \in \mathbb{R}_+$.

Далее, пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства, в [2] введено в рассмотрение квазибанахово пространство линейных непрерывных операторов $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Возьмем операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ и аналогично «банахову случаю» (см. напр., [3]) введем в рассмотрение L-резольвентное множество $\rho^L(M)$ и L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M. Назовем оператор M (L,σ)-*ограниченным*, если его L-спектр $\sigma^L(M)$ ограничен; и (L,p)-ограниченным, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, если вдобавок ∞ является устранимой особой точкой ($p = 0$), либо полюсом порядка $p \in \mathbb{N}$ L-резольвенты $(\mu L - M)^{-1}$, $\mu \in \mathbb{C}$, оператора M.

Пусть операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, в [4] впервые было рассмотрено уравнение соболевского типа

$$ L\dot{u} = Mu + f \tag{1} $$

и задача Коши $u(0) = u_0$ для него. Между тем, как неоднократно отмечалось [5], [6], задача Шоултера–Сидорова

$$ \left[R_\alpha^L(M)\right]^{p+1} (u(0) - u_0) = 0 \tag{2} $$

более естественна для уравнений соболевского типа, нежели задача Коши, в которую (2) переходит в случае существования оператора $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$. (Здесь $R_\alpha^L(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ — правая L-резольвента оператора M, $\mu \in \rho^L(M)$).

Пусть $(\xi,\tau) \subset \mathbb{R}$, вектор-функцию $u \in C^1((\xi,\tau);\mathfrak{U})$ назовем (*классическим*) *решением* уравнения (1), если она поточечно удовлетворяет (1). Решение $u = u(t)$ уравнения (1) назовем решением задачи (1), (2), если оно удовлетворяет (2) при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Теорема. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, и точка $0 \in (\xi,\tau)$. Тогда при любых $f \in C^{p+1}((\xi,\tau);\mathfrak{F})$ и $u_0 \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение $u = u(t)$, $t \in (\xi,\tau)$, задачи (1), (2), которое к тому же имеет вид*

$$ u(t) = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} (\mathbb{I} - Q) f^{(k)}(t) + U^t u_0 + \int_0^t U^{t-s} L_1^{-1} Q f(s) ds. $$

Здесь операторы $H = M_0^{-1}L_0$, M_0^{-1} и L_1^{-1} существуют в силу теоремы о расщеплении [2], а семейство операторов $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ — вырожденная голоморфная разрешающая группа однородного уравнения (1). Положим $P = U^0$, по построению оператор $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ — проектор. Заметим, что в силу (L,p)-ограниченности, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, оператора M начальное условие (2) эквивалентно условию

$$P(u(0) - u_0) = 0. \tag{3}$$

В [7] введен в рассмотрение квазиоператор Лапласа $\Lambda u = \{\lambda_k u_k\}$, который действует в квазибанаховых пространствах как топлинейный изоморфизм, т.е. $\Lambda \in \mathcal{L}(\ell_q^{m+2}; \ell_q^m)$ и $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(\ell_q^m; \ell_q^{m+2})$ при всех $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$, где $\Lambda^{-1}u = \{\lambda_k^{-1}u_k\}$ — квазиоператор Грина. В [4] построены операторы

$$L = \lambda - \Lambda, \qquad M = \alpha\Lambda \tag{4}$$

и показано, что при любых $\lambda, m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M $(L,0)$-ограничен. Абстрактное уравнение (1), где $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$, а операторы L и M заданы формулами (4), носит название «уравнение Баренблатта–Желтова–Кочиной» и является наиболее известным неклассическим уравнением математической физики [8]. Оно моделирует влагоперенос в почве, фильтрацию жидкости в трещинновато-пористых средах, теплопроводность в средах с двумя температурами и т.д. Условие (2) в данном случае удобно взять в виде (3), где проектор

$$Pu = \begin{cases} \{u_k\}, & \text{если } \lambda_k \neq \lambda \text{ при всех } k \in \mathbb{N}; \\ \{(u_k : \ k \in \mathbb{N} \setminus \{\ell : \ \lambda_\ell = \lambda\}) \ \& \ (u_\ell = 0 : \ \lambda_\ell = \lambda)\}. \end{cases} \tag{5}$$

Следствие. *Пусть точка $0 \in (\xi, \tau)$. Тогда при любых $\lambda, m \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $q \in \mathbb{R}_+$, $f \in C^1((\xi,\tau); \ell_q^m)$ и $u_0 \in \ell_q^{m+2}$ существует единственное решение $u \in C^1((\xi,\tau); \ell_q^{m+2})$ задачи (1), (2), где проектор P задан формулой (5).*

Литература

[1] Аль-Делфи Д.К. Квазисоболевы пространства ℓ_p^m // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика, механика, физика. – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 107–109.

[2] Свиридюк Г.А., Аль-Делфи Дж.К. Теорема о расщеплении в квазибанаховых пространствах // Математические заметки ЯГУ. – 2013. – Т. 20, № 2. – С. 180–185.

[3] Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.

[4] Аль-Делфи Дж.К. Модель Баренблатта-Желтова-Кочиной с условием Коши в квазибанаховых пространствах // Материалы междунар. конф. «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2014». – Воронеж: Научная книга, 2014. – С. 14–17.

[5] Свиридюк Г.А., Загребина С.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 104–125.

[6] Шестаков А.Л., Келлер А.В., Назарова Е.И. Численное решение задачи оптимального измерения // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107–115.

[7] Аль-Делфи Дж.К. Квазиоператор Лапласа в квазисоболевых пространствах // Вестник СамГТУ. Серия Физ.-мат. науки. – 2013. – Вып. 2 (13). – С. 13–16.

[8] Свиридюк Г.А., Загребина С.А. Неклассические модели математической физики // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 40 (299). – С. 7–18.

Линейные уравнения соболевского типа с относительно p-секториальными операторами в квазибанаховых пространствах

Аль-Исави Дж.К. (Россия)
Южно-Уральский государственный университет (НИУ)
jtahir71@gmail.ru

Свиридюк Г.А. (Россия)
Южно-Уральский государственный университет (НИУ)
sviridyuk@74.ru

Уравнения соболевского типа вида

$$L\dot{x} = Mx, \tag{1}$$

в банаховых пространствах, где оператор M сильно (L,p)-секториален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, впервые появились в [1]. Затем последовало распространение этих результатов на полулинейные уравнения [2], а также перенесение их на пространства Фреше [3]. Между тем недавно начались [4] и активно продолжаются [5] исследования уравнений (1), где оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, в квазибанаховых пространствах. Одним из наиболее известных примеров квазибанаховых пространств (помимо банаховых) служат пространства последовательностей ℓ_q, $q \in (0,1)$. Их тоже удалось обобщить, введя в рассмотрение квазисоболевы пространства ℓ_q^m [6] и квазиоператор Лапласа $\Lambda : \ell_q^{m+2} \to \ell_q^m$, $q \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{R}$.

В докладе обсуждается распространение этих результатов на уравнения (1) с относительно сильно p-секториальным оператором [7]: строятся вырожденные голоморфные разрешающие полугруппы однородного уравнения (1), рассматривается задача Коши, приводится точное решение. В дальнейшем предполагается, опираясь на идеологию [8], рассмотреть неавтономное уравнение вида (1).

Литература

[1] Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.

[2] Свиридюк Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, № 5. – С. 252–272.

[3] Федоров В.Е. Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах // Мат. сб. – 2004. – Т. 195, № 8. – С. 131–160.

[4] Аль-Делфи Д.К. Квазиоператор Лапласа в квазисоболевых пространствах // Вестник СамГТУ. Серия Физ.-мат. науки. – 2013. – Вып. 2 (13). – С. 13–16.

[5] Свиридюк Г.А., Аль-Делфи Дж.К. Теорема о расщеплении в квазибанаховых пространствах // Математические заметки ЯГУ. – 2013. – Т. 20, № 2. – С. 180–185.

[6] Аль-Делфи Д.К. Квазисоболевы пространства ℓ_p^m // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика, механика, физика. – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 107–109.

[7] Аль-Исави Дж.К. Линейные замкнутые операторы в квазибанаховых пространствах // Материалы междунар. конф. «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2014». – Воронеж: Научная книга, 2014. – С. 18–21.

[8] Shestakov A., Sviridyuk G., Sagadeeva M. Reconstruction of a Dynamically Distorted Signal with Respect to the Measure Transducer Degradation // Applied Mathematical Sciences. – 2014. – Vol. 8, no. 43. – pp. 2125–2130.

Уравнение Буссинеска-Лява в квазибанаховых пространствах

Аль Хелли Х.М. (Россия)
Южно-Уральский государственный университет (НИУ)
Замышляева А.А. (Россия)
Южно-Уральский государственный университет (НИУ)
alzama@mail.ru

Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка в банаховых пространствах рассматривались в [1]. Одним из направлений развития данного исследования является распространение теории уравнений соболевского типа высокого порядка в квазибанаховы пространства [2]. Расхожим примером квазибанаховых пространств служат пространства последовательностей ℓ_q, $q \in (0,1)$. В работе [3] построены квазибанаховы пространства ℓ_q^m, $q \in (0,1)$, $m \in \mathbb{R}$, $\ell_q^0 = \ell_q$, которые названы квазисоболевыми [4]. В докладе представлены результаты о разрешимости задачи Коши

$$u^{(j)}(0) = u^j, \ j = 0, ..., n-1 \tag{1}$$

для уравнения

$$Lu^{(n)} = Mu, \ \ker L \neq \{0\}. \tag{2}$$

где операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, а $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства.

Вектор-функцию $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (2) поточечно, назовем (*классическим*) *решением* этого уравнения. Решение $u = u(t)$ уравнения (2), удовлетворяющее условию (1), назовем *решением задачи* (1), (2). Как известно, задача (1), (2) разрешима не при любых начальных значениях.

Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется *фазовым пространством* уравнения (2), если

(i) при любых $u^j \in \mathfrak{P}$, $j = 0, ..., n-1$ существует единственное решение задачи (1), (2);

(ii) любое решение $u = u(t)$ уравнения (2) лежит в $\mathfrak{P}$ как траектория (т.е. $u(t) \in \mathfrak{P}$ при всех $t \in \mathbb{R}$).

Теорема. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда фазовым пространством уравнения (2) служит подпространство $\mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} P$, где проектор*

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma R_\mu^L(M) d\mu.$$

Пусть $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ — монотонная последовательность такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$, а $q \in \mathbb{R}_+$. Положим $\ell_q^m = \left\{ u = \{u_k\} \subset \mathbb{R} : \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\lambda^{\frac{m}{2}} |u_k| \right)^q < +\infty \right\}$. Введем в рассмотрение *квазиоператор Лапласа* с помощью формулы $\Lambda u = \{\lambda_k u_k\}$, $u \in \ell_q^m$. Построим операторы

$$L = \lambda - \Lambda, \qquad M = \alpha\Lambda. \tag{3}$$

При всех $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M $(L,0)$-ограничен.

Рассмотрим уравнение Буссинеска–Лява как одно из неклассических уравнений математической физики второго порядка [5]

$$(\lambda - \Lambda)\ddot{u} = \alpha\Lambda u. \tag{4}$$

Справедливо

Следствие. *При любых $\lambda, m \in \mathbb{R}$, $\alpha, q \in \mathbb{R}_+$, $u^0, u^1 \in \mathfrak{U}^1$ существует единственное решение задачи (1), (4).*

Литература

[1] Замышляева А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.

[2] Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение. – М.: Мир, 1980. – 264 с.

[3] Свиридюк Г.А., Аль-Делфи Д.К. Теорема о расщеплении в квазисоболевых пространствах // Математические заметки ЯГУ. – 2013. – Т. 20, № 2. – С. 180–185.

[4] Аль-Делфи Д.К. Квазиоператор Лапласа в квазисоболевых пространствах // Вестник СамГТУ. Серия Физ.-мат. науки. – 2013. – Вып. 2 (13). – С. 13–16.

[5] Ляв А. Математическая теория упругости /А. Ляв; пер. с англ. Б.В. Булгаков, В.Я. Натанзон. – Москва; Ленинград: ОНТИ, 1935. – 674 с.

Об одной задаче виброконсолидации соленых грунтов и методы ее решения

Алтынбеков Ш. (Казахстан)
Южно-Казахстанский государственный педагогический институт
shahmaksut@mail.ru

В работе исследован вопрос о разрешимости следующей задачи виброконсолидации неоднородных соленых грунтов

$$\frac{\partial H}{\partial t} = C_{vn}(x,t,H)L(H) - C_{1n}(x,t,H)\cdot\left\{\int\limits_{\tau_1}^{t} f(\tau,H)K_s(t,\tau,H)d\tau + f(t,H)K_s(t,t,H)\right\} + \\ +C_{2n}(x,t,H), \quad x=(x_1,x_2,x_3), \quad t\in \amalg_T; \tag{1}$$

$$H(x,\tau_1) = H_0(x), \quad x\in D,$$

$$\pm X_s^{(\alpha)}(x,t)\frac{\partial H}{\partial x_s} + X_s^{(\alpha+1)}(x,t)H\big|_{\Gamma} = \psi(x,t)_{\Gamma}, \tag{2}$$

$$\tau < t < T < \infty, \quad s=1,2,3; \quad \alpha = 1,2,3, \tag{3}$$

где

$$L = \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_s}\left(K_{0s}\frac{\partial}{\partial x_s}\right), \quad K_1(t,\tau,H) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial(t,\tau,H)}{\partial\tau}\right), \quad K_2(t,t,H) = \frac{\partial(t,\tau,H)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=t},$$

$$\bar{\amalg}_T = \bar{D}x(\tau\le t\le\infty), \quad \bar{D} = (-l_1\le x_1\le l_1,\ -l_1\le x_2\le l_1,\ 0\le x_3\le h),$$

$$C(t,\tau,H) = A_c\varphi(\tau,H), \quad (t-\tau)^{m_c}(Ba^{n_c}+1), \quad \varphi(\tau,H) = C_\sigma + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{\tau^k + B_kH},$$

A_c и m_c – параметры ползучести, a, B – амплитуда и параметр колебаний.

Изложен в виде теоремы метод итерации для решения начально-краевой задачи (1)-(3).

Теорема. *Пусть $C_{vn}(x,t,H)$, $C_{1n}(x,t,H)$, $C_{2n}(x,t,H)$, $K_{\phi n}(x,t,H)$ и $H(x,t)$ – функции класса $C^2(x\in D_\phi,\ 0<\tau_1\le t\le T)\bigcap C(\bar{\amalg}_t)$ и положительны, функция $H_0(x)$ содержится в области определения оператора L, функция $H(x,t)$ есть решение задачи (1)-(3) и $H_k(x,t)$ $(k=1,2,\ldots)$ – решение дифференциального уравнения*

$$\frac{\partial H_k}{\partial t} = C_{vn}(x,t,H_{k-1}) < (H_k) - C_{1n}(x,t,H_{k-1})\times$$

$$\times \left\{ \int f(\tau, H_{k-1}) K_1(t, \tau, H_{k-1}) d\tau + f(t, H_{k-1}) K_2(t, t, H_{k-1}) \right\} + C_{2n}(x, t, H_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

удовлетворяющее начально-краевым условиям (2), (3), причем $H > H_1$. *Тогда последовательность* $\{H_k\}$, $(k=1,2,\ldots)$ *сходится к единственному решению* $H(x,t)$ *задачи (1)-(3) при* $k \to \infty$.

Следуя принципам максимума и теоремы сравнения [1], доказательство теоремы приводится по той же схеме, что и доказательство теоремы в [2].

Пользуясь идеями локально-одномерной схемы (ЛОС) и методами итерации, к задаче (1)-(3) поставлена конечно-разностная краевая задача. Исследованы погрешность, устойчивость и равномерная сходимость ЛОС.

Обоснован метод прогонки для решения конечно-разностной краевой задачи. Оценены решения разностной задачи при помощи формул прогонки.

Литература

[1] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. // Москва, Мир, 427 с.(1968)

[2] Алтынбеков Ш., Ширинкулов Т.Ш. Об одном итерационном методе нелинейных краевых задач консолидации грунтов // «Доклад академии наук Республики Узбекистан». Математика. Технические науки. Естествознание. Ташкент, №1-2. С.25-27 (1986).

Уравнения Вольтерра в моделировании ПИ- и ПИД-регуляторов[2]

Андреев А.С. (Россия)
Ульяновский государственный университет
AndreevAS@ulsu.ru

Раков С.Ю. (Россия)

В управлении механическими и другими техническими системами широкое применение имеют ПИ- и ПИД-регуляторы [1,2]. Исследование стабилизации движений таких управляемых систем приводится к задаче об устойчивости нелинейного уравнения Вольтерра следующего типа

$$\dot{x}(t) = h(t, x) + \int_0^t R(t, s, x(s)) ds, \tag{1}$$

где $x \in R^n$ — вектор $n-$мерного линейного действительного пространства с некоторой нормой $|x|$, (h и R — некоторые функции, определенные и непрерывные соответственно в областях $R^+ \times G$, $D \times G$, $D = \{(t,s) : 0 \leqslant t < +\infty, 0 \leqslant s \leqslant t\}$, $G \subset R^n$).

Строится топологическая динамика уравнения (1), позволяющая описать предельные свойства его решений.

Это позволяет применить для исследования предельного поведения решений (1) функционал Ляпунова вида

$$V = V_1(t, x(t)) + \int_0^t V_2(t, s, x(s)) ds \geqslant 0, \tag{2}$$

имеющего в силу этого уравнения знакопостоянную производную $\dot{V} \leqslant 0$.

Доказываются соответственные теоремы о предельном поведении решений (1), об асимптотической устойчивости нулевого решения (1), когда $h(t,0) \equiv 0$, $R(t,s,0) \equiv 0$.

[2]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (12-01-33082мол_а_вед) и Минобрнауки России в рамках базовой части (код проекта 2097).

Эти результаты позволяют строго обосновать применение ПИ- ПИД-регуляторов для стабилизации программных движений голономных механических систем, в том числе, описываемых уравнениями Лагранжа, вывести новые результаты о достаточных условиях их стабилизируемости.

Приводятся решения задач о стабилизации движений манипуляторов, твердого тела посредством таких регуляторов.

Литература

[1] Ананьевский И.М., Колмановский В.Б. О стабилизации некоторых регулируемых систем с последействием // Автоматика и телемеханика. 1989. № 5. С. 34–42.

[2] Павликов С.В. О стабилизации движений управляемых механических систем с запаздывающим регулятором // Доклады РАН. 2007. Т. 412. № 2. С. 1–3.

Параболическое уравнение с нестепенными нелинейностями в неограниченной области: существование и единственность решения

Андриянова Э.Р. (Россия)
Уфимский государственный авиационный технический университет
elina.andriyanov@mail.ru

Мукминов Ф.Х. (Russia)
Институт математики с вычислительным центром Российской академии наук
mfkh@rambler.ru

Пусть Ω — неограниченная область пространства $R_n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $n \geq 2$. В цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$ рассматривается уравнение

$$(\beta(x,u))'_t = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{p_i}(x,u,\nabla u)\right)_{x_i} - b(x,u,\nabla u), \text{ где } a(x,u,\nabla u) = a(x,u,p)\Big|_{p=\nabla u}, \qquad (1)$$

с монотонным оператором в правой части, удовлетворяющим условию

$$b(x,u,p)u + \sum_{i=1}^{n} a_{p_i}(x,u,p)p_i \geq \sum_{i=1}^{n} B_i(p_i) - c\psi(x,u,p),$$

где $B_i, i = 1,2,...,n$ – некоторые N-функции. Краевые условия однородны:

$$u(t,x)\Big|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega; \quad u(0,x) = u_0(x). \qquad (2)$$

Функция $\beta(x,u)$, $\beta(x,0) = 0$, $|\beta(x,u)| \leq c_\beta |u| |\beta'(x,u)|$, абсолютно непрерывна и возрастает по u, а также измерима по $x \in \Omega$ при $u \in R$. При этом предполагается, что $\beta(x,u) \geq 0$ – ограниченная в каждой ограниченной области значений (x,u) функция. Здесь и далее через β', β'_1, γ', g' обозначаем производные по u абсолютно непрерывных функций

Через $L_B(Q)$ обозначим пространство Орлича, соответствующее N-функции $B(s)$, с нормой Люксембурга.

Определим также анизотропное пространство Соболева-Орлича $\overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega)$ как пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{W^1_{G,B}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{B_i,\Omega} + \|u\|_{G,\Omega}.$$

Через $V(D^T)$, будем обозначать пополнение $C_0^\infty(D^T)$ по норме

$$\|u\|_{V(D^T)} = \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{B_i,D^T} + \|u\|_{G,D^T}.$$

Пусть при почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x,u)$ абсолютно непрерывна по $u \in R$ и определена равенством: $g'(x,u) = u\beta'(x,u)$, $g(x,0) = 0$.

Будем предполагать, что существует N-функция $G(u)$ такая, что

$$G(u) \le g(x,u) \le c_g G(u).$$

Потребуем существование разложения $\beta(x,u) = \beta_1(x,u) + \gamma(x,u)$, где $\beta_1'(x,u) \ge 0$, а $\gamma'(x,u) > 0, u \ne 0$, – четная по u неограниченная функция, убывающая на полуоси $(0,\infty)$ (разложение может быть неединственным. Четности всегда можно добиться, полагая $\widetilde{\gamma}'(x,|u|) = \min(\gamma'(x,-u), \gamma'(x,u))$. При этом допустимо $\beta_1 \equiv 0$ или $\gamma \equiv 0$, но не одновременно. Предполагается существование таких N-функций H, J, что

$$\overline{H}(\beta_1'(x,u)) + H(u^2) + \overline{J}(u^2 + \frac{1}{\beta'(x,u)}) \le c\phi(x,u).$$

Пространства Орлича, соответствующие N-функции $J(s^2)$ будем обозначать $L_{J_2}(Q)$ и через $L_{\overline{J}_2}(Q)$ – сопряженные к ним.

При некоторых условиях (*) на функции a, b, ϕ, ψ установлено существование решения задачи (1),(2).

Теорема. *Пусть* $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega)$ *и выполняются условия (*). Тогда существует обобщенное решение задачи* (1), (2), *удовлетворяющее соотношениям*

$$u \in L_{\infty,\mathrm{loc}}([0,\infty); \overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega)),$$

$$\beta_1(x,u) \in C([0,\infty); L_{\overline{H}_2}(\Omega)),$$

$$(\beta_1(x,u))_t' \in L_{\overline{H}_2}(D^T),\ \forall T > 0.$$

$$\gamma(x,u) \in C([0,\infty); L_{J_2}(\Omega))$$

$$u' \in L_{\infty,\mathrm{loc}}([0,\infty); L_{\overline{J}_2}(\Omega)).$$

$$\left(\beta'(x,u)\right)^{\frac{1}{2}} u' \in L_2(D^T).$$

При некоторых дополнительных условиях доказан принцип максимума и установлено степенное убывание решения по времени.

В предположении $(\beta(x,u))_t \in L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{D^T})$ доказана единственность решения.

Принадлежность $(\beta(x,u))_t \in L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{D^T})$ имеет место, например, при $\gamma \equiv 0$. При $\gamma \not\equiv 0$ в определенном смысле установлена единственность положительных решений.

Субриманова задача на группе Энгеля

Ардентов А.А. (Россия)
Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН
aaa@pereslavl.ru

Сачков Ю.Л. (Россия)
Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН
sachkov@sys.botik.ru

Исследуется нильпотентная субриманова задача группе Энгеля $M = \mathbf{R}^4$:

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad q = (x, y, z, v)^T \in M, \quad (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2,$$
$$X_1 = \left(1, 0, -\frac{y}{2}, 0\right)^T, \quad X_2 = \left(0, 1, \frac{x}{2}, \frac{x^2 + y^2}{2}\right)^T,$$
$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \to \min.$$

Эта задача дает нильпотентную (нелинейную) аппроксимацию произвольной неголономной системе в 4-мерном пространстве с 2-мерным управлением. Например, различным системам, моделирующим движение колесного робота с прицепом.

Ранее, было построено экспоненциальное отображение Exp, переводящее начальный вектор сопряженных переменных λ и произвольное время t в соответствующую точку экстремальной траектории $q(t) = \mathrm{Exp}(\lambda, t)$. Описаны дискретные симметрии экспоненциального отображения и найдены соответствующие множества Максвелла, что позволило для произвольной экстремальной траектории определить первое время Максвелла $t^1_{\mathrm{MAX}}(\lambda)$.

Доказано, что найденное первое время Максвелла совпадает с временем разреза $t_{\mathrm{cut}}(\lambda) = t^1_{\mathrm{MAX}}(\lambda)$, в соответствующей точке разреза $\mathrm{Exp}\left(\lambda, t_{\mathrm{cut}}(\lambda)\right)$ экстремальная траектория $q(t)$ теряет свою глобальную оптимальность. Найденное время разреза задает разбиение прообраза и образа экспоненциального отображения на подобласти. Доказано, что сужение отображения на эти подобласти есть диффеоморфизм.

Начато исследование множества разреза — построено подмножество лежащее в гиперплоскости $x = 0$, в дальнейшем будет построено множество в гиперплоскости $z = 0$, а также численно будут изучены субримановы сферы в задаче.

Многомерное явление Стокса

Артамонов Д.В. (Россия)
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
artamonov.dmitri@gmail.com

Рассмотрим систему

$$\frac{dy}{dz} = A(z)y$$

от одной комплексной переменной z. В случае, когда $A(z)$ имеет особенности первого порядка (т.е. в случае фуксовой системы), данной системе естественно соответсвует представление монодромии, которое определяет систему с точностью до калибровочной эквивалентности. При этом все решения окрестности особой точки имеют степенной рост.

Особенность называтеся иррегулярной, если в её окрестности решение имеет экспоненциальный рост. В этом случае представление монодромии недостаточно для определения системы. Необходимы дополнительные данные, в частности, матрицы Стокса.

Утверждения о том, что в фуксовом случае имеется эквивалентность между множеством систем и множеством представлений монодромии может быть сформулировано на языке теории пучков, D-модулей и теории категории. Данный язык является более естественным для обощения на случай многих переменных $z_1, ..., z_n$. Эквивалентность называется при этом

соотвествием Римана-Гильберта. Аналогичное соответсвие в многомерном фуксовом случае было получено Кашиварой.

Обобщение соответствия на многомерный иррегулярный случай представляло большие трудности. Тем не менее этот случай был разобран в недавних работах Т. Мочезуки.

В докладе преполагается рассмотреть конструкцию Мочезуки на конкретном примере, описать явно структуры, являющиеся многомерным обощением матриц Стокса.

Стабильные гомотопические группы сфер как дифференциальные неравенства

Ахметьев П.М. (Россия)
Институт земного магнетизма, ионосферы
и распространения радиоволн им. Н. В. Пушкова РАН
pmakhmet@izmiran.ru

По конструкции Понтрягина - Тома (в форме Уэллса) элемент n-ой стабильной гомотопической группы сфер Π_n представлен погружением φ замкнутого ориентированного n-мерного многообразия в евклидово $n+1$-мерное пространство. Погружение рассматривается как частный случай дифференциального неравенства. Метод малого параметра для погружений называется принципом C^0–плотности в смысле Хирша и формулируется так: погружение φ в любом предписанном классе регулярной гомотопии можно получить сколь угодно малым возмущением любого погружения φ_0 того же многообразия. Поэтому элемент стабильной гомотопической группы сфер, представленный погружением φ аналитического многообразия, получается C^0–малым возмущением фиксированного аналитического погружения φ_0 этого же многообразия.

Для аналитических погружений исследуются многообразия точек итерированного самопересечения. На фундаментальной группе многообразия итерированного самопересечения определено действие специальной группы монодромии (группы Галуа). В книге Ф.Клейна [1] исследуется теория Галуа для группы икосаэдра. Свободное действие квадратичного расширения группы икосаэдра на сфере S^3 было предложено и исследовано А.Пуанкаре в начале прошлого века. Эта конструкция доставляет пример аналитического погружения $S^3 \to R^5$, которое определено при помощи универсального накрытия над пространством Пуанкаре. С помошью этого примера можно описать образующую Π_3, что иллюстрирует вычисления В.А.Рохлина, проделанные в 60-х годах прошлого века, см. [2]. В частности, 2-компонента $[\Pi_3]_{(2)} \cong Z/8$ группы $\Pi_3 \cong Z/8 \oplus Z/3$ описывается как группа эквивалентности $Z/4$–значных квадратичных форм.

Цель доклада – описать образующую 2-компоненты $[\Pi_7]_{(2)} \cong Z/16$ стабильной гомотопической группы $\Pi_7 \cong Z/3 \oplus Z/5 \oplus Z/16$. Определим новую разновидность W группы классов эквивалентности (группы Витта) квадратичных форм, $W \cong Z/16$. Элемент группы W представлен $Z/4$–значной специальной квадратичной формой на фундаментальной группе замкнутой (неориентируемой) поверхности, причем эта фундаментальная группа дополнительно представлена как группа монодромии в квадратичное расширение группы целочисленных кватернионов.

Образующая группы W строится по поверхности двукратного итерированного самопересечения предписанного аналитического погружения φ_0. В качестве φ_0 выбирается погружение проективного пространства RP^6 в 7-мерное линзовое пространство, построенное по квадратичному расширению группы целочисленных кватернионов. (Замечу, что сама группа целочисленных кватернионов – это 2-компонента в квадратичном расширении группы икосаэдра. При описании всей группы Π_7 используется двукратное квадратичное расширение группы икосаэдра.) Неаналитическая поправка $\delta(\varepsilon)$, вносимая малой деформацией $\varepsilon : \varphi_0 \mapsto \varphi$, лежит в той же группе W, но задана квадратичной формой меньшего уровня сложности, $\delta(\varepsilon) \in 2W \subset W$.

Построения, обсуждаемые в докладе, носят универсальный характер. Они применимы к разнообразным примерам накрытий над обобщенными многомерными линзовыми пространствами.

Литература

[1] Клейн Ф., Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени, пер. с нем./ М. *Наука* 1989.

[2] Гийу Л., Марэн А., В поисках утраченной топологии, пер. с фр./ М. Мир, 1986.

О МУЛЬТИСПЕКТРЕ МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ[3]

Барышева И.В. (Россия)
Липецкий государственный педагогический университет
barysheva_iv@mail.ru

Калитвин А.С. (Россия)
Липецкий государственный педагогический университет
kalitvinas@mail.ru

Пусть $C(G)$ и $C(L^1(\Omega))$ — пространство непрерывных на $G=[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ функций и пространство непрерывных на G вектор-функций со значениями в $L^1(\Omega)$, соответственно, где $\Omega\in\{[a,b],[a,b]\times[c,d],[a,b]\times[e,f],G\}$, $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$, $(t,s,r)\in G$, интегралы понимаются в смысле Лебега и

$$A(\lambda)=C-\lambda_1K-\lambda_2L-\lambda_3M-\lambda_4N, \tag{1}$$

где

$$(Cx)(t,s,r)=c(t,s,r)x(t,s,r),\quad (Kx)(t,s,r)=\int_a^b k(t,s,r,\tau)x(\tau,s,r)d\tau,$$

$$(Lx)(t,s,r)=\int_a^b\int_c^d l(t,s,r,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma,r)d\tau d\sigma,$$

$$(Mx)(t,s,r)=\int_a^b\int_c^f m(t,s,r,\tau,\xi)x(\tau,s,\xi)d\tau d\xi,$$

$$(Nx)(t,s,r)=\int_a^b\int_c^d\int_e^f n(t,s,r,\tau,\sigma,\xi)x(\tau,\sigma,\xi)d\tau d\sigma d\xi.$$

С оператором (1) связаны интегро-дифференциальные уравнения Колмогорова - Феллера и другие интегро-дифференциальные уравнения, моделирующие различные прикладные задачи [1-4]. В условии следующей теоремы операторы C, K, L, M, N действуют и непрерывны в пространстве $C(G)$.

Теорема. *Пусть функция $c\in C(G)$, функции k,l,m,n принадлежат пространствам $C(L^1([a,b]))$, $C(L^1([a,b]\times[c,d]))$, $C(L^1([a,b]\times[e,f]))$, $C(L^1(G))$ соответственно. Тогда существенные мультиспектры оператора (1) в смысле Густавссона-Вайдмана, Като, Вольфа и Шехтера совпадают и справедливы следующие утверждения:*

1. Если $c(t,s,r)\neq 0$ на G, то n-нормальность, d-нормальность, фредгольмовость и нетеровость оператора (1) в $C(G)$ равносильны обратимости в $C([a,b])$, в $C([a,b]\times[c,d])$ и в $C([a,b]\times[e,f])$ соответственно операторов следующих трёх семейств операторов:

$$A_{\lambda_1}(s,r)x(t)=x(t)-\lambda_1\int_a^b\frac{k(t,s,r,\tau)}{c(t,s,r)}x(\tau)d\tau\ ((s,r)\in[c,d]\times[e,f]),$$

[3]Работа поддержана Минобрнауки России (проект № 1.4407.2011)

$$A_{\lambda_2}(r)y(t,s) = y(t,s) - \lambda_2 \int_a^b \int_c^d \frac{l(t,s,r,\tau,\sigma)}{c(t,s,\tau)} y(\tau,\sigma)d\sigma d\tau \ (r \in [e,f]),$$

$$A_{\lambda_3}(s)z(t,r) = z(t,s) - \lambda_3 \int_a^b \int_e^f \frac{m(t,s,r,\tau,\xi)}{c(t,s,\tau)} z(\tau,\xi)d\xi d\tau \ (s \in [c,d]).$$

2. Если $c(t_0,s_0,\tau_0) = 0$, *где* $(t_0,s_0,\tau_0) \in G$, *то оператор (1) не является ни фредгольмовым, ни нетеровым, ни* n *и ни* d*-нормальным в* $C(G)$.

В заключение отметим, что определения и свойства мультиспектра и его частей ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве изучались в [5].

Литература

[1] Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. – New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. – 560 p.

[2] Агекян Т. А. Теория вероятностей для астрономов и физиков. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. – 264 с.

[3] Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. – М.: Мир, 1987. – 479 с.

[4] Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 444 с.

[5] Калитвин А. С. О мультиспектре линейных операторов // Операторы и их приложения (Приближение функций. Уравнения): межвуз. сб. науч. тр. – Ленинград: ЛГПИ им. А.И. Герцена, 1985. – С. 91-99.

Прямой и обратный фотофорез, Радиометр Крукса и реактивные силы

Батищева Я.Г. (Россия)
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Веденяпин В.В. (Россия)
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
vicveden@yahoo.com

Мелихов И.В. (Россия)
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
melikhov@radio.chem.msu.ru

Фотофорезом называется движение частиц под действием света. Существование светового давления было доказано П.Н.Лебедевым, с которым иногда фотофорез связывают. Однако в 1918 году Эренхафом [1] было открыто явление обратного фотофореза. Частицы пыли, взвешенные в воздухе, в лучах мощной лампы иногда двигались по направлению к источнику. Этот эффект нельзя было объяснить световым давлением. Движение частиц от источника света было названо положительным или прямым фотофорезом, к источнику – отрицательным или обратным фотофорезом. Однако объяснение его было неудовлетворительным [3-4]. Радиометр Крукса был создан в 1873 году для измерения светового давления и был предметом последней статьи Д.К.Максвелла [2].

В докладе будет предложено объяснение обратного фотофореза и радиометра Крукса на основе хемореактивного движения, изучавшегося на химфаке МГУ в группе И.В.Мелихова и в ИПМ им. М.В.Келдыша РАН [5-7].

Литература

[1] Ehrenhalf F. Ann. Phys. 1918. Bd 55. S. 81-132.

[2] J.K. Maxwell. On Stresses in Rarefied Gases Arising From Enequalities in Temperature. *Phil. Trans. Roy. Soc. London for 1879, 170*, pp.233-257. Перевод: *Д.К. Максвелл.* «О напряжениях в разреженном газе, возникающих вследствие неоднородностей температуры». В книге Д.К. Максвелл. Труды по кинетической теории . Москва, Бином, 2011, стр. 266-299.

[3] Н.А. Фукс. Механика аэрозолей. М., изд-во АН СССР, 1955.

[4] Ю.И. Яламов, А.С. Хасанов. Фотофорез гетерогенных по теплопроводности крупных аэрозольных частиц. Журнал технической физики, 1998, том 68, N 4.

[5] И.В. Мелихов, Е.Ф. Симонов, В.Е. Божевольнов, В.В. Веденяпин. Хемореактивное движение твердых тел, реагирующих с газом. М., Книжный дом Университет, 2006.

[6] В.В. Веденяпин, Я.Г. Батищева, И.В. Мелихов, А.Я. Горбачевский. О движении твердого тела в газе с неоднородными поверхностными процессами. Мат. моделирование, 2003, т.15, с.6.

[7] В.В. Веденяпин. Фотофорез и реактивные силы. Математическое моделирование. 2006, т. 18, номер 8, стр. 57-66.

Стабилизация движений диска по реологическому основанию

Безгласный С.П. (Россия)
Самарский государственный аэрокосмический университет
bezglasnsp@rambler.ru
Павлов Г.В. (Россия)
Самарский государственный архитектурно-строительный университет
pavlovgv@rambler.ru

Реологические модели находят широкое применение при анализе работы конструкции из синтетических материалов. Теоретически и экспериментально показано [1], что реологическое тело Кельвина – Фойхта достаточно корректно описывает природу несовершенной упругости при стационарных и нестационарных колебаниях неметаллических материалов. К сожалению, вопрос построения уравнений Лагранжа для анализа гироскопических систем с упруговязкими элементами модели Кельвина в литературе практически не освещался.

Рассмотрено движение однородного кругового жесткого диска по вязкоупругому основанию, наделенному деформационно-демпфирующими свойствами, отвечающими физической модели Кельвина, и работающему совместно с безмассовой оболочкой-мембраной с конечной жесткостью на растяжение. Предполагается, что основание имеет точечный контакт с диском, причем силы взаимодействия сводятся к силе, приложенной в точке касания и направленной по радиусу диска. Силовое взаимодействие между диском и основанием, вообще говоря, сводится к силе реологической реакции и моменту трения, так как контакт колеса и основания с учетом их деформаций осуществляется по некоторой малой поверхности контакта.

Построена новая математическая модель силового взаимодействия движущегося по реологическому основанию диска в условиях модели Кельвина. Получена система дифференциальных уравнений движения диска в форме модифицированных уравнений Чаплыгина, включающих обобщенную реологическую силу реакции и уравнения неголономных связей. Решена задача о стабилизации внешними силами стационарных движений диска.

Литература

[1] Василенко Н.В. Теория колебаний. // Киев: Высща Школа,1992. 430 с.

Сингулярная задача Римана-Гильберта в сложных областях[4]

Безродных С.И. (Россия)
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН
sergeyib@pochta.ru

Власов В.И. (Россия)
ГАИШ МГУ
vlasov@ccas.ru

В жордановой области $\mathcal{B} \subset \mathbf{C}$ с кусочно–ляпуновской границей рассматривается задача Римана — Гильберта $\mathrm{Re}\big[h(z)f(z)\big] = c(z)$, $z \in \partial\mathcal{B}$, где коэффициент $h(z)$ и правая часть $c(z)$ заданные на границе $\partial\mathcal{B}$ кусочно–гельдеровы функции с разрывами первого рода в точках z_l, $l = \overline{0,N}$, в которых предполагаются условия степенного (возможно неинтегрируемого) роста решения $f(z)$. С помощью конформного отображения $z = \Phi(\zeta)$, $\zeta = \xi + i\eta$, полуплоскости $\mathbf{H}^+$ на $\mathcal{B}$ эта задача сводится к аналогичной задаче в полуплоскости: $\mathrm{Re}\big[H(\zeta)\mathcal{P}^+(\zeta)\big] = C(\zeta)$, $\zeta \in \mathbf{R} \setminus \{\xi_l\}$, где $\{\xi_l\}_{l=0}^N$ — набор точек разрыва кусочно–гельдеровых $H(\zeta)$, $C(\zeta)$, $\xi_0 = \infty$. Обозначим $\{n_l\}$ — набор чисел из $\mathbf{Z}^+$, определяющих условия роста решения при $\zeta \to \xi_l$: $\mathcal{P}^+(\zeta) = O\big[(\zeta - \xi_l)^{\alpha_l - n_l}\big]$, если $n_l \neq 0$, и $\mathcal{P}^+ = O(1)$, если $n_l = 0$, а в $x_0 = \infty$ — условию $\mathcal{P}^+(\zeta) = O(\zeta^{\alpha_0 + n_0})$, $\zeta \to \infty$. Здесь α_l — дробная часть величины $\pi^{-1}\left[\arg H(\xi_l + 0) - \arg H(\xi_l - 0)\right]$ при $l \neq 0$ и величины $\pi^{-1}\left[\arg H(+\infty) - \arg H(-\infty)\right]$ при $l = 0$; соответствующие целые части обозначаем κ_l и κ_0. Пусть все $\alpha_l > 0$.

Теорема. **(i)** *Если индекс* $\kappa := n_0 - \kappa_0 + \sum_{l=1}^K (\kappa_l + n_l)$ *неотрицателен, то решение поставленной задачи имеет вид*

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = X^+(\zeta)\Big[\,P_\kappa(\zeta) + (\pi i)^{-1}\,S(\zeta) \times \int_{\mathbf{R}} \frac{C(t)}{S(t)\,H(t)\,X^+(t)\,(t-\zeta)}dt\Big],$$

где $P_\kappa(\zeta)$ *— произвольный полином степени* κ *с вещественными коэффициентами,* $X^+(\zeta) := \prod_{l=1}^K (\zeta - \xi_l)^{-\kappa_l - n_l} \exp\big[M^+(\zeta)\big]$ *— каноническое решение задачи,*

$$M^+(\zeta) := \frac{\zeta - \delta}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{\big[\pi/2 - \arg H(t)\big]\,dt}{(t-\delta)\,(t-\zeta)}, \quad S(\zeta) := (\zeta - \lambda)^{2\{\kappa/2\}}\,(\zeta^2+1)^{[\kappa/2]};$$

здесь δ, $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{\xi_l\}$.

(ii) *Если* $\kappa = -1$, *то единственным решением рассматриваемой задачи является функция*

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = (\pi i)^{-1} X^+(\zeta) \int_{\mathbf{R}} C(t)\left[H(t)\,X^+(t)\,(t-\zeta)\right]^{-1} dt\,.$$

Если $\kappa < -1$ *и выполняются условия разрешимости* $\int_{\mathbf{R}} \frac{t^l C(t)}{H(t)X^+(t)}dt = 0$ *при* $l = 0, 1, \ldots, |\kappa| - 2$, *то единственное решение задачи дается той же формулой. Если же* $\kappa < -1$ *и условия разрешимости не выполнены, то эта задача не имеет решений.*

Получив решение $\mathcal{P}^+(\zeta)$ в $\mathbf{H}^+$, восстанавливаем решение исходной задачи Римана — Гильберта в $\mathcal{B}$ по формуле $f(z) = \mathcal{P}^+ \circ \Phi^{-1}(z)$. Отметим, что эффективные вычислительные методы конформного отображения сложных областей изложены в ряде известных руководств, а также в [1].

Литература

[1] Безродных С. И., Власов В. И. Сингулярная задача Римана — Гильберта в сложных областях // Spectral and Evolution Problems. 2006. Т. 16. С. 51–61.

[4]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №13-01-00923), Программы ОМН РАН «Современные проблемы теоретической математики», (проект «Оптимальные алгоритмы решения задач математической физики») и Программы №3 фундаментальных исследований ОМН РАН.

Формула вычисления энтропии некоторых кос их трёх нитей

Бирюков О.Н. (Россия)
Московский государственный областной социально-гуманитарный институт
oleg_biryukov@mail.ru

Рассматривается классическая группа кос Артина из 3 нитей:

$$B_3 = \langle\, \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \,\rangle$$

и её гомоморфизм (см. [3]) в группу классов отображений (гомеотопий) компактной ориентированной двумерной поверхности M рода нуль с 4 компонентами края:

$$\varphi : B_3 \to \mathrm{Homeot}(M).$$

Поверхность M является гиперболической, а гомеотопии любой гиперболической поверхности в соответствии с классификацией Нильсена-Тёрстона (см. [1]) делятся на три типа: периодические, псевдоаносовские и приводимые. Соответственно различают аналогичные типы кос.

Тип косы из трёх нитей можно определить, используя следующее представление группы кос:

$$\psi : B_3 \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \qquad \sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема. (см. [1] и [2]) *Для периодической косы β из трёх нитей след матрицы $\psi(\beta)$ по абсолютной величине меньше 2, для приводимой косы — равен 2, для псевдоаносовской косы — больше 2.*

Энтропией косы β называется точная нижняя грань топологической энтропии гомеоморфизмов в классе $\varphi(\beta)$. Энтропия косы определяет минимальный хаос в поведении траекторий при действии гомеоморфизмов, принадлежащих классу $\varphi(\beta)$.

Известно, что энтропия периодических и приводимых кос из трёх нитей равна нулю, а энтропия псевдоаносовской косы β может быть вычислена через след матрицы $\psi(\beta)$:

$$h(\beta) = \log\left(\frac{\mathrm{tr}\ \psi(\beta)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\mathrm{tr}\ \psi(\beta)}{2}\right)^2 - 1}\right).$$

Теорема. *Коса из трёх нитей вида $(\sigma_1^k\sigma_2^m)^s$, где $k, s, m \in \mathbb{Z}$, является псевдоаносовской тогда и только тогда, когда $|2 - km| > 2$. Энтропия псевдоаносовской косы из трёх нитей вида $(\sigma_1^k\sigma_2^m)^s$ может быть вычислена по формуле:*

$$h(\beta) = \log\left(\frac{T}{2} + \sqrt{\left(\frac{T}{2}\right)^2 - 1}\right),$$

где

$$T = \frac{|(2 - km + \sqrt{km(km-4)})^s + (2 - km - \sqrt{km(km-4)})^s|}{2^s}.$$

Следствие. *Энтропия косы из трёх нитей вида $(\sigma_1^k\sigma_2^m)^s$, где $k, s, m \in \mathbb{Z}$, зависит только от произведения km и числа s. С ростом величины $|km|$ при фиксированном s энтропия косы $(\sigma_1^k\sigma_2^m)^s$ строго возрастает. Энтропия кос $(\sigma_1^{k_1}\sigma_2^{m_1})^s$ и $(\sigma_1^{k_2}\sigma_2^{m_2})^s$ совпадает тогда и только тогда, когда $k_1m_1 + k_2m_2 = 4$.*

Литература

[1] Кэссон Э., Блейлер С. Теория автоморфизмов поверхностей по Нильсену и Тёрстону. — М.: ФАЗИС, 1998.

[2] Andersen J. E., Masbaum G., Ueno K. Topological Quantum Field Theory and The Nielsen-Thurston Classification of M(0,4), Math. Proc. Camb. Phil. Soc., (2006) 141 (No. 03) pp. 477 - 488.

[3] Bernardete D., Nitecki Z., Gutierrez M. Braids and the Nielsen-Thurston classification. J. Knot Theory and its Ramifications, 4 (1995), 549–618.

Особенности неявного обыкновенного дифференциального уравнения, квадратичного по производной

Богаевский И.А. (Россия)
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
ibogaevsk@gmail.com

Доказано, что при некоторых условиях (контактной вырожденности и квадратичности по производной) на росток неявного дифференциального уравнения любую его деформацию в классе контактной эквивалентности можно получить с помощью деформации независимой и зависимой переменных в исходном ростке. В частности, мы получаем новое доказательство теоремы о нормальных формах сложенных особых точек, полученной А.А.Давыдовым в 1985 году совсем другим методом.

Несмотря на то, что аналогичная теорема для многомерных лежандровых подмногообразий была доказана А.Б.Гивенталем ещё в 1988 году, её вариант для поверхности в трёхмерном контактном пространстве до сих пор не был ни сформулирован, ни доказан. Это тем более странно, что вышеописанное отсутствие новых непрерывных инвариантов по сравнению с контактной эквивалентностью наблюдается при локальной классификации квадратичного по производной уравнения во всех решённых задачах и выглядит несколько загадочным.

Полугруппа эволюционного уравнения с памятью

Борель Л.В. (Россия)
Челябинский государственный университет
lidiya904@mail.ru

Фёдоров В.Е. (Россия)
Челябинский государственный университет
kar@csu.ru

Для банахова пространства $\mathcal{U}$ через $\mathcal{L}(\mathcal{U})$ будем обозначать множество линейных непрерывных операторов в $\mathcal{U}$. Через D_A обозначается область определения замкнутого оператора $A : \mathcal{U} \to \mathcal{A}$, снабженная нормой его графика. Обозначим также через $C([0,+\infty];\mathcal{U})$ ($C([-\infty,0];\mathcal{U})$) банахово пространство непрерывных на полуоси и имеющих конечный предел на $+\infty$ (на $-\infty$) функций.

Пусть оператор $A : D_A \to \mathcal{U}$, $D_A \subset \mathcal{U}$, порождает (C_0)-непрерывную полугруппу операторов из $\mathcal{L}(\mathcal{U})$. Рассмотрим задачу для уравнения с памятью

$$u(t) = u_-(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$u'(t) = Au(t) + \int_{-\infty}^{t} K(t-s)u(s)ds + f(t), \quad t \in [0,T), \tag{2}$$

при заданных $u_- : (-\infty,0] \to \mathcal{U}$, $K : [0,+\infty) \to \mathcal{L}(\mathcal{U})$, $f : [0,T) \to \mathcal{U}$, $T \leqslant +\infty$. Решением задачи (1), (2) на промежутке $[0,T)$ будем называть функцию $u \in C^1([0,T);\mathcal{U}) \cap C([0,T);D_A) \cap C((-\infty,T);\mathcal{U})$, для которой справедливо условие (1) и при каждом $t \in [0,T)$ выполняется равенство (2).

В некоторых работах (см., например, [1, 2]) используется метод редукции систем уравнений в частных производных с нестационарным интегральным оператором памяти к системе уравнений со стационарным оператором в правой части с помощью добавления дополнительных зависимой и независимой переменных. Воспользуемся этим методом для общей задачи (1), (2).

Введем в рассмотрение функцию $v(t,s) = \int\limits_0^s u(t-\tau)d\tau = \int\limits_{t-s}^t u(\tau)d\tau$, для нее

$$\frac{\partial v}{\partial t} = u(t) - \frac{\partial}{\partial s}v(t,s), \tag{3}$$

при этом для $\mathcal{K} \in W_1^1(0,+\infty;\mathcal{L}(\mathcal{U}))$

$$\int\limits_{-\infty}^t \mathcal{K}(t-s)u(s)ds = -\int\limits_0^{+\infty} \mathcal{K}'(s)v(t,s)ds.$$

Следовательно, из (2) получено уравнение

$$u'(t) = Au(t) - \int\limits_0^{+\infty} \mathcal{K}'(s)v(t,s)ds + f(t). \tag{4}$$

Таким образом, задача (1) для нестационарного уравнения (2) сведена к задаче

$$u(0) = u_-(0), \quad v(0,s) = \int\limits_{-s}^0 u_-(\tau)d\tau, \ s \geqslant 0,$$

для системы уравнений (3), (4), которую можно записать в виде стационарного неоднородного уравнения $w'(t) = Bw(t) + g(t)$ в пространстве $\mathcal{W} = \mathcal{U} \times C([0,+\infty];\mathcal{U})$. Здесь

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A & A_1 \\ J & A_2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

операторы A_1, A_2, J действуют по правилам

$$A_1 z = -\int\limits_0^{+\infty} \mathcal{K}'(s)z(s)ds, \quad (A_2 z)(s) = -z'(s), \quad (Jz)(s) \equiv z, \ s \geqslant 0.$$

С помощью теоремы о возмущении ограниченным оператором инфинитезимального генератора (C_0)-непрерывной полугруппы [3] доказана

Теорема. *Пусть оператор A порождает (C_0)-непрерывную полугруппу операторов в пространстве $\mathcal{U}$, $\mathcal{K} \in W_1^1(R_+;\mathcal{L}(\mathcal{U}))$. Тогда определенный в (5) оператор B порождает (C_0)-непрерывную полугруппу операторов в пространстве $\mathcal{U} \times C([0,+\infty];\mathcal{U})$.*

Отсюда легко получить следующий результат.

Следствие. *Пусть оператор A порождает (C_0)-непрерывную полугруппу операторов в пространстве $\mathcal{U}$, $u_- \in C([-\infty,0];\mathcal{U}) \cap L_1(-\infty,0;\mathcal{U})$, $u_-(0) \in D_A$, $\mathcal{K} \in W_1^1(0,+\infty;\mathcal{L}(\mathcal{U}))$ и либо $f \in C^1([0,T);\mathcal{U})$, либо $f \in C([0,T);D_A)$. Тогда существует единственное решение задачи (1), (2) на промежутке $[0,T)$.*

Литература

[1] Dafermos C.M. Asymptotic stability in viscoelasticity. Arch. Rational Mech. Anal. 1970. Vol. 37. P. 297–308.

[2] Giorgi C., Pata V. Asymptotic behavior of a semilinear problem in heat conduction with memory. Nonlinear differ. equ. appl. 1998. Vol. 5. P. 333–354.

[3] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.

Спектральный анализ операторов типа Лежандра на оси[5]

Бройтигам И.Н. (Россия)
Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В.Ломоносова
irinadolgih@rambler.ru

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$l_4[y](x) := (p_2(x)y'')'' - (p_1(x)y')' + ky(x), x \in R, \tag{1}$$

где $k \geqslant 0$ и вещественнозначные функции $p_2(x)$ и $p_1(x)$ определяются как

$$p_2(x) := (1-x^2)^2;$$

$$p_1(x) := p^3(1-x^2) + p^2(1-x) + p^1(1+x) + p^0; \quad p^0, p^1, p^2, p^3 \in \mathrm{R}, p^3 > 0.$$

Отметим, что если $x \in (-1,1)$ и, например,

$$p_1(x) = 4A(1-x^2) + 8, \tag{2}$$

то выражение (1) порождает операторы типа Лежандра, собственными функциями которых являются ортогональные полиномы в асимптотическом смысле ведущие себя как классические многочлены Лежандра. Спектральные характеристики таких операторов хорошо известны и изложены, например в [1].

Дифференциальное выражение (1) на вещественной оси имеет 4 регулярные особые точки: ± 1 и $\pm\infty$.

Рассмотрим множества $I_1 := (-\infty, -a]$, $I_2 := [-a, a]$, $I_3 := [a, +\infty)$, $a > 1$, $I_4 := (-\infty, +\infty)$. На множествах I_j, $j = 1,3$, выражение (1) - выражение с единственной особенностью на конце, а следовательно, оно известным образом определяет минимальные замкнутые симметрические операторы $L_{0,j}$ в гильбертовых пространствах $\mathcal{L}_2(I_j)$, $j = 1,3$. На I_j, $j = 2,4$, дифференциальное выражение (1) имеет внутренние особенности, поэтому определим минимальные замкнутые симметрические операторы $L_{0,j}$ как замыкания операторов, порождённых (1) на множествах бесконечно дифференцируемых финитных функций $C_0^\infty(I_j)$.

Рассмотрим I_j, $j = 1,3$. В этих случаях дифференциальное выражение (1) удовлетворяет всем условиям теоремы Орлова [2] и применяя эту теорему можно определить дефектные числа операторов $L_{0,j}$, $j = 1,3$, а именно, справедливо следующее

Утверждение. Дефектные числа каждого из операторов $L_{0,1}$ и $L_{0,3}$, порождённых выражением (1) в пространствах $\mathcal{L}_2(I_1)$ и $\mathcal{L}_2(I_3)$ соответственно, равны $(2,2)$.

Случай оператора $L_{0,2}$ уже существенно сложнее. Ниже приведём только результаты соответствующие представлению (2) функции $p_1(x)$.

Метод Фробениуса из аналитической теории дифференциальных уравнений позволяет построить фундаментальные системы решений уравнения $l_4[y](x) = \lambda y$ в правосторонней и левосторонней окрестностях точек -1 и $+1$. Далее, применяя методы, использованные в работах [3] и [4], доказывается

Теорема. Дефектные числа оператора $L_{0,2}$, порождённого дифференциальным выражением (1) в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(I_2)$, равны $(4,4)$.

Из сформулированных выше утверждения и теоремы непосредственно следует, что оператор $L_{0,4}$ при условии (2) самосопряжён.

[5]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ и Германской службы академических обменов (DAAD) по программе «Михаил Ломоносов» (ref: 325-A/13/74976)

Литература

[1] W.N. Everitt, A.M. Krall, L.L. Littlejohn. On some properties of the Legendre type differential expression. Quaestiones Math., 13 (1) (1990), pp. 83–106.

[2] Орлов С.А. Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов. ДАН СССР. 1953. Т.92, №3. С. 483-486.

[3] Орочко Ю.Б. Индексы дефекта одночленного симметрического дифференциального оператора четного порядка, вырождающегося внутри интервала. Математический сборник. 2005. Т.196. №5. С. 53-82.

[4] Бройтигам И.Н. Спектральный анализ одночленного симметрического дифференциального оператора чётного порядка. Вестник Северного (Арктического) федерального университета. Серия: Естественные науки. 2009. № 3. С. 76-84.

Время прогноза и перемешивание в хаотических системах

Бутковский О.Я. (Россия)
Финансовый университет при Правительстве РФ, Владимирский филиал
OYButkovskiy@fa.ru

Хрипунова М.Б. (Россия)
Финансовый университет при Правительстве РФ, Владимирский филиал
MBKHripunova@fa.ru

Возможности реконструкции адекватной математической модели по наблюдаемому временному ряду посвящено много работ и интерес к этой проблеме не остывает. Получаемые результаты реконструкции хаотических систем – модельные уравнения, зачастую значительно не дотягивают по прогностической способности до предельного времени предсказуемого поведения τ_{pred} таких систем [1-3]: $\tau_{pred} = \frac{1}{2}\lambda \ln(\sigma_A^2/\sigma_x^2)$. Здесь: λ – наибольший ляпуновский показатель, σ_A^2 – квадрат характерного размера аттрактора, σ_x^2 – дисперсия шумов, включая погрешность неточности модели. Рассмотрены причины, такие как неоднородность фазового пространства, а именно наличие областей, которые авторы назвали как «русла» и «джокеры»[4]. По определению авторов джокеры являются регионами в фазовом пространстве, в которых динамика системы становится плохо предсказуемой, она просто изменяется, усложняется или даже становится вероятностной и случайной. В противоположность джокерам вводятся русла - области устойчивого, хорошо прогнозируемого движения. Показано что разработанный в работах [3,6] метод реконструкции позволяет диагностировать области непредсказуемого поведения, и показана их связь с динамикой локальных Ляпуновских показателей на примерах хорошо известных систем Рёсслера, Лоренца и др. Методы определения областей «русел» и «джокеров» дают лишь качественное объяснение уменьшения времени прогноза, поэтому для описания было привлечено явление «перемешивания» в фазовом пространстве. Существующие результаты по оценке скорости перемешивания позволяют установить скорость перемешивания и связать ее с Ляпуновскими показателями лишь для определенных классов дискретных отображений. Сделана попытка, аналитического вычисления скорости перемешивания для непрерывных динамических систем (например, задаваемых в виде систем ОДУ) исходя из определения. Математически понятие перемешивания, можно определить, как это сделано в работе [6]. Для этого рассмотрим аттрактор G некоторой хаотической системы, на котором задан оператор эволюции системы $S(G)$ и инвариантная мера μ. Выберем на аттракторе G две произвольные области B и W. Отношение меры точек из области B, которые через n итераций оператора эволюции S попали в область W по отношению к мере самой области W можно записать следующим образом: $D_n = \frac{\mu(S^n(B)\bigcap W)}{\mu(W)}$. Оператор S является перемешивающим, если

при $n \to \infty$ значение D_n в уравнении не зависит от конкретного выбора области W, а определяется отношением $\mu(B)/\mu(G)$. С помощью описанного в работе [6] алгоритма оценки скорости перемешивания, пригодного для исследования как дискретных, так и непрерывных динамических систем, сделана попытка оценить скорость перемешивания ряда известных хаотических систем с различными геометрическими и динамическими свойствами аттракторов, а также приведены строгие результаты вычисления этой скорости для хорошо изученных отображений. Рассмотрена связь локальной скорости перемешивания, локальных Ляпуновских показателей (ЛЛП) и локальных топологических свойств аттрактора.

Литература

[1] Ю.А. Кравцов Случайность, детерминированность, предсказуемость. // Успехи физ. наук. (1989). Т. 158, № 1.-С.93-115.

[2] О.Я. Бутковский, Ю.А. Кравцов Обратные задачи хаотической динамики и проблема предсказуемости хаоса. Труды семинара «Время Хаос и Математические Проблемы». М.: Книжный дом «Университет», (1999), № 1, с. 165-181.

[3] Bellachook, G. Malinetskii Tricks of jokers of one-dimensional map. Proceedings 5-th International Specialist Workshop Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, june 26-27 (1997), Moskow.

[4] О.Я. Бутковский, М.Ю. Логунов Русла и Джокеры в непрерывных системах // ЖЭТФ, 2007.-Т.131.,вып.6, С.1107-1114.

[5] О.Л. Аносов, О.Я. Бутковский, Ю.А. Кравцов Минимаксная процедура идентификации хаотических систем по наблюдаемой временной последовательности // Радиотехника и электроника. (1997), Т.42, № 3, с. 1-7.

[6] О.Я. Бутковский, М.Ю. Логунов Перемешивание и ляпуновские показатели хаотических систем // ЖТФ, 2008.-Т.78.,вып.8, С.1-8.

Исследование устойчивости решений некоторых классов начально-краевых задач аэрогидроупругости[6]

Вельмисов П.А. (Россия)
Ульяновский государственный технический университет
velmisov@ulstu.ru

Анкилов А.В. (Россия)
Ульяновский государственный технический университет

При проектировании различных конструкций, устройств, установок, приборов, аппаратов, систем и т.д., находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой (обтекаемых потоком жидкости или газа), необходимо решать задачи, связанные с исследованием устойчивости деформируемых элементов, требуемой для их функционирования и надежности эксплуатации.

Принятые в работе определения устойчивости деформируемого (вязкоупругого, упругого) тела соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Изучается устойчивость элементов летательных аппаратов, трубопроводных систем, датчиков измерения параметров газожидкостных сред при различных способах закрепления элементов при дозвуковом или сверхзвуковом режимах обтекания сжимаемой или несжимаемой средой. Некоторые результаты отражены в монографии [1]. Воздействие газа или жидкости (в модели идеальной среды) определяется из асимптотических уравнений аэрогидромеханики.

[6]Работа выполнена в рамках гос. задания №2014/232 Минобрнауки России.

Для описания динамики упругих элементов используется как линейная, так и нелинейная теории твердого деформируемого тела.

Для решения связанных задач аэрогидроупругости используется несколько подходов. В частности, один из подходов основан на построении решения аэрогидродинамической части задачи методами теории функций комплексного переменного, при этом аэрогидродинамическая нагрузка (давление жидкости или газа) определяется через функции, описывающие неизвестные прогибы элементов (стержней, пластин, оболочек). Тогда решение исходных задач сводится к исследованию систем связанных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными для функций прогибов элементов. Другой подход использует для построения решения аэрогидродинамической части задачи метод Фурье и представление искомых функций (потенциала скорости и прогибов элементов) в виде рядов. При этом аэрогидродинамическая нагрузка также определяется через функции, описывающие неизвестные прогибы элементов, для которых вновь возникает связанная система интегро-дифференциальных уравнений. Исследование устойчивости проводится на основе прямого метода Ляпунова и численных методов. Построены положительно определенные функционалы типа Ляпунова, соответствующие полученным системам интегро-дифференциальных уравнений с частными производными. Проведено также исследование устойчивости на основе численно-аналитических методов (основой которых служит метод Бубнова-Галеркина) с реализацией численного эксперимента. Проведенные численные эксперименты показали удовлетворительное согласование необходимых и достаточных условий устойчивости, полученных численно, с достаточными условиями, полученными аналитически на основе исследования функционалов.

Для некоторых задач аэрогидроупругости проведено также исследование устойчивости, основанное на построении «смешанных» функционалов типа Ляпунова для исходной связанной системы уравнений, содержащей как уравнения движения газожидкостной среды, так и уравнения динамики деформируемых элементов.

В докладе приведены примеры постановок некоторых задач аэрогидроупругости и примеры исследования динамической устойчивости движения деформируемых элементов конструкций.

Для примера приведем постановку задачи о плоском течении идеального газа в прямолинейном канале $J = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}$. Скорость невозмущенного однородного потока равна V и направлена вдоль оси Ox. Упругой является часть стенки $y = y_0$ при $x \in [b, c]$, моделируемая упругой пластиной.

Введем обозначения: $u(x,t)$ и $w(x,t)$ – деформации упругой пластины в направлении осей Oy и Ox соответственно; $\varphi(x,y,t)$ – потенциал скорости возмущенного потока. Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\varphi_{tt} + 2V\varphi_{xt} + V^2\varphi_{xx} = a^2\left(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}\right), \quad (x,y) \in J, \quad t \geqslant 0,$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = \dot{w}(x,t) + Vw'(x,t), \quad x \in (b,c), \quad t \geqslant 0,$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0,b] \cup [c, x_0), \quad t \geqslant 0,$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geqslant 0,$$

$$\varphi(0, y, t) = 0, \quad \varphi(x_0, y, t) = 0, \quad y \in (0, y_0), t \geqslant 0,$$

$$w(b,t) = w'(b,t) = 0 \text{ или } w(b,t) = w''(b,t) = 0, \quad t \geqslant 0,$$

$$w(c,t) = w'(c,t) = 0 \text{ или } w(c,t) = w''(c,t) = 0, \quad t \geqslant 0,$$

$$\begin{cases} -EF\left(u'(x,t) + \frac{1}{2}w'^2(x,t)\right)' + M\ddot{u}(x,t) = 0, \\ -EF\left[w'(x,t)\left(u'(x,t) + \frac{1}{2}w'^2(x,t)\right)\right]' + M\ddot{w}(x,t) + Dw''''(x,t) + \\ +Nw''(x,t) + \beta_0 w(x,t) + \beta_1\dot{w}(x,t) + \beta_2\dot{w}''''(x,t) = \\ = -\rho\left(\varphi_t(x, y_0, t) + V\varphi_x(x, y_0, t)\right), \quad x \in (b,c), \quad t \geqslant 0. \end{cases}$$

Здесь индексы x, y, t снизу обозначают частные производные по x, y, t; штрих и точка – частные производные по x и t соответственно; ρ – плотность газа в однородном невозмущенном потоке; $F = h/\left(1-\nu^2\right)$; h – толщина пластины; ν – коэффициент Пуассона; E, D, M – модуль упругости, изгибная жесткость и погонная масса пластины; N – сжимающая или растягивающая пластину сила; β_1, β_2 – коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования; β_0 – коэффициент жесткости основания; a – скорость звука в невозмущенном потоке жидкости $(a > V)$.

Исследование устойчивости по Ляпунову нулевого решения $w(x,t) \equiv 0$, $u(x,t) \equiv \equiv 0$, $\varphi(x,y,t) \equiv 0$ поставленной выше краевой задачи проведено на основе исследования смешанного функционала

$$\Phi(t) = \iint\limits_J \left(\varphi_t^2 + \left(a^2 - V^2\right)\varphi_x^2 + a^2\varphi_y^2\right) dxdy - 2a^2V \int\limits_b^c \varphi(x, y_0, t) w'(x,t)\, dx +$$

$$+\frac{a^2}{\rho} \int\limits_b^c \left(M\dot{w}^2 + Dw''^2 - Nw'^2 + \beta_0 w^2\right) dx.$$

Получены достаточные условия устойчивости, накладывающие ограничения на параметры механической системы.

Литература

[1] Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. Ульяновск: УлГТУ, 2013. 322 с.

Исследование функций Xu

Вишневская Н.И. (Россия)
Московский государственный областной социально-гуманитарный институт
01nadya1984@mail.ru

Работа посвящена исследованию функций гипергеометрического типа, связанных с решениями модели Калоджеро - Сазерленда. Функция следа этих решений в простом случае является гипергеометрической функцией Гаусса. Обобщение этого результата для функций следа при $n > 2$ привело к новому семейству гипергеометрических функций многих переменных, дифференциальные свойства и интегралы которых описываются интегралами по некоторым траекториям от степенных функций с иррациональными (или комплексными) показателями.

В случае $n = 2$, след может быть представлен с помощью гипергеометрической функции Гаусса

$$E(z_1, z_2) = \frac{z_1^{\lambda_1+1} z_2^{\lambda_2}}{z_1 - z_2} F(\mu+1, -\mu; \lambda_2 - \lambda_1, \frac{z_2}{z_2 - z_1})$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \mu$ - комплексные константы.

В настоящей работе изучается функция следа при $n = 3$, которая представляется рядом

$$\chi_A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta; x, y, z) = \sum_{m,n,k}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{m+n}(\alpha_2 - m)_k(\alpha_3)_{n+k}}{(\beta)_{n+k} m!n!k!} x^m y^n z^k,$$

где $(a)_n = a(a+1)...(a+n-1)$. Далее изучаются аналитические свойства этой функции, которые можно представить следующим образом

$$\chi_A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta; x, y, z) =$$

$$= (1-z)^{-\alpha_2}(1-y)^{-\alpha_1}\chi_A(\alpha_1, \alpha_2, \beta-\alpha_3; \beta; \frac{x(1-z)}{1-y}, \frac{y}{y-1}, \frac{z}{z-1}) =$$

$$= (-x)^{-\alpha_1}(1-z)^{-\alpha_3}\chi_A(\alpha_1, \beta-\alpha_1-\alpha_2, \alpha_3; \beta; \frac{1}{x}, \frac{y}{x(z-1)}, \frac{z}{z-1}) =$$

$$= (1-z)^{\beta-\alpha_2-\alpha_3}(xz-x-y)^{-\alpha_1}\chi_A(\alpha_1, \beta-\alpha_1-\alpha_2, \beta-\alpha_3; \beta; \frac{1}{x+y-xz}, \frac{y}{x+y-xz}, z)$$

Для функции следа при $n = 4$ имеют место аналогичные соотношения.

Литература

[1] И.Н.Бернштейн, Модули над кольцом дифференциальных операторов. Изучение фундаментальных решений уравнений с постоянными коэффициентами // Функц.анализ и его приложения, т.5, вып. 2, 1971, 1–16.

[2] M.A.Olshanetsky, A.M.Perelomov, Completely integrable Hamiltonian systems connected with semisimple Li Algebras // Inventiones math., 37,1976, 93–108.

[3] Xiaoping Xu, Etingof trace, path hypergeometric functions and integrable systems // Institute of Mathematics, Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing 10080, P.R.China.

О нижней оценке для минимального собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с краевыми условиями второго типа и ограничениями на потенциал[7]

Владимиров А.А. (Россия)
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН
vladimi@mech.math.msu.su

Карулина Е.С. (Россия)
Московский государственный университет экономики, статистики и информатики
karulinaes@yandex.ru

Рассматривается задача Штурма–Лиувилля с краевыми условиями Неймана

$$-y'' + qy - \lambda y = 0,$$
$$y'(0) = y'(1) = 0,$$

где функция q принадлежит множеству

$$A_\gamma = \{q \in L_1[0,1] : q(x) \geqslant 0, \int_0^1 q^\gamma\, dx = 1\}$$

при $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Уточняется значение $m_\gamma = \inf\limits_{q \in A_\gamma} \lambda_1(q)$ при некоторых значениях параметра γ:

Теорема 1. *При $\gamma \leqslant 1/2$ выполняется равенство $m_\gamma = 1$, а при $1 - 2/\pi^2 < \gamma < 1$ выполняется неравенство $m_\gamma < 1$.*

Ранее в [5] было найдено значение $m_1 = \lambda_1(\delta_1) = 0.740174\,(\pm 10^{-6})$, где δ_1 — дельта-функция Дирака с носителем в точке 1.

Аналогичные результаты для некоторых других значений γ получены в работах одного из авторов (см., например, [4]). Подобные задачи рассматривались также в работах [1]–[3].

[7] Работа первого автора поддержана РФФИ, проект № 13-01-00705. Работа обоих авторов поддержана РФФИ, проект № 14-01-31423.

Литература

[1] Ю.В. Егоров, В.А. Кондратьев. Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма–Лиувилля // Успехи матем. наук. — 1996. — Т. 51 (3). — С. 73–144.

[2] В.А. Винокуров, В.А. Садовничий. О границах изменения собственного значения при изменении потенциала // Доклады РАН. — 2003. — Т. 392 (5). — С. 592–597.

[3] С.С. Ежак. Об оценках минимального собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с интегральным условием // Соврем. матем. и её прилож. — 2007. — Т. 36. — С. 56–69.

[4] Е.С. Карулина. Оценки первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с краевыми условиями третьего типа // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа: науч. издание, под ред. Асташовой И.В. — 2012. — М.: ЮНИТИ-ДАНА — С. 560–607.

[5] E.S. Karulina, A.A. Vladimirov. The Sturm–Liouville problem with singular potential and the extrema of the first eigenvalue // Tatra Mountains Mathematical Publications. — 2013. — Т. 54. — С. 101–118.

Некоторые оценки в задачах над конечным полем и их непрерывные аналоги

Вьюгин И.В. (Россия)
Институт проблем передачи информации имени А. А. Харкевича РАН
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
vyugin@gmail.com

В докладе будет получена следующая оценка количества решений уравнения над конечным полем, лежащих в «боксе» $G \times G$.

Теорема 1. *Пусть G — подгруппа группы Z_p^* (мультипликативной группы простого конечного поля, p — простое число), причем порядок $|G|$ не выше $p^{3/4}$, $f(x) \in Z_p[x]$ — многочлен над Z_p степени m, тогда выполнена следующая оценка: число решений уравнения*

$$f(\lambda) = \mu \tag{1}$$

таких, что $\lambda, \mu \in G$ не превосходит $8|G|^{2/3}$.

Есть надежда, что при порядках подгрупп G, близких к $p^{3/4}$, оценка является точной по порядку степени.

Нетрудно заметить, что верно следующее утверждение:

Следствие 1. *При указанных выше ограничениях, число решений уравнения*

$$f(\lambda) = \mu^n, \tag{2}$$

таких, что $\lambda, \mu \in G$, не превосходит $8n|G|^{2/3}$.

Интерес представляет случай, когда $n = 2$, а $m = 3$, так как в этом случае мы получаем новую оценку числа точек стандартной эллиптической кривой, лежащих в боксе $G \times G$. На эллиптических кривых основаны современные методы криптографии.

При доказательстве утверждений такого типа используются методы, близкие к методам теории линейных дифференциальных уравнений (см. [2]). Так, аналогом некоторого факта, лежащего в основе этого результата, является теорема 2, дающая новую оценку порядка нуля полинома от решений линейного дифференциального уравнения. Эта теорема дает более сильный результат, чем тот, который может быть получен из [1].

Рассмотрим фундаментальную систему решений $u_1(z), \ldots, u_n(z)$ линейного дифференциального уравнения

$$u^{(n)} + b_1(x)u^{(n-1)} + \ldots + b_n(x)u = 0, \tag{3}$$

имеющего особые точки $a_1, \ldots, a_m \in C \setminus \{0\}$ (здесь мы предполагаем, что все особые точки фуксовы).

Пусть показатели β_i^j уравнения (3) в точках a_i удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Re} \beta_i^j \geq B_i \in Z. \tag{4}$$

Отметим, что $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ образуют линейно независимую систему функций, а пространство, натянутое на эту систему функций, инвариантно относительно действий группы монодромии уравнения (3). Заметим, что система функций

$$\Phi_\alpha(x) = u_1^{\alpha_1}(x) \ldots u_n^{\alpha_n}(x), \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in Z_+^n, \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = M, \tag{5}$$

также порождает пространство, инвариантное относительно групп монодромии уравнения (3).

Теорема 1. *Пусть система функций* (5) *линейно независима и показатели уравнения* (3) *удовлетворяют условиям* (4). *Тогда для любого целого*

$$t \geq \frac{1}{2}(m-2)(k-1) - M \sum_{i=1}^{m} B_i$$

система функций

$$\Psi_{\alpha,\mu}(x) = x^{\mu t} u_1^{\alpha_1}(x) \ldots u_n^{\alpha_n}(x), \qquad \mu \in Z_+, \quad \alpha \in Z_+^n, \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = M,$$

линейно независима над R и C.

Литература

[1] А.А. Болибрух, Кратности нулей компонент решений системы с регулярными особыми точками // Дифференциальные уравнения и динамические системы, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Тр. МИАН, 236, Наука, М., 2002, 61-65

[2] И.В. Вьюгин, И.Д. Шкредов, Об аддитивных сдвигах мультипликативных подгрупп // Матем. сб., 203:6 (2012), 81-100

Об универсальности энтропии, как функции Ляпунова и функции, описывающей концентрацию инвариантной меры[8]

Гасников А.В. (Россия)
Московский физико-технический институт
gasnikov@yandex.ru

Двуреченский П.Е. (Россия)
Институт проблем передачи информации имени А. А. Харкевича РАН
pavel.dvurechensky@gmail.com

В работе [1] исследовалась система уравнений стохастической химической кинетики, задающаяся марковским (ветвящимся) процессом с не более чем счетным числом состояний в непрерывном времени. Было обнаружено, что при весьма общих предположениях (грубо говоря, практически всегда) если инвариантная (стационарная) мера этого процесса представляется в виде

$$\sim \exp\left(-M \cdot \left(H\left(\vec{c}\right) + o\left(1\right)\right)\right), \quad M \gg 1, \tag{1}$$

[8]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 13-01-12007-офи_м; Лаборатории структурных методов анализа данных в предсказательном моделировании МФТИ грант правительства РФ дог. 11.G34.31.0073; гранта Президента РФ № МК-5285.2013.9.

где $\vec{c} = \vec{n}/M$- вектор концентраций молекул различных типов, M - общее число молекул всех типов в системе, то $H(\vec{c})$ является функцией Ляпунова детерминированной кинетической динамики Гульдберга-Вааге (описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений), полученной в результате предельного перехода $M \to \infty$ (в приближении Больцмана) из исходно стохастической марковской динамики. Это утверждение обобщает теорему работы [2]. В основе доказательства лежит техника работы [3].

Оказывается, этот результат (с некоторыми оговорками) может быть перенесен и на пространственно-распределенные системы, т.е. на системы, в которых есть пространственная диффузия [главы 7, 8; 4], [5]. Точнее говоря, если инвариантная (стационарная) мера представляется в виде

$$\sim \exp\left(-M \cdot \left(H\left(\vec{c}\left(\cdot\right)\right) + o\left(1\right)\right)\right), \quad M \gg 1, \tag{2}$$

где $\vec{c}(x)$ - вектор плотности концентраций молекул различных типов в точке $\vec{x}$ (изначально точки $\vec{x}$ - точки дискретной решетки и слово "плотность" не нужно, но в системе еще осуществляется предельный переход по размеру ячейки решетки, стремящемуся к нулю так, что в каждой ячейки все время будет достаточно много молекул), M - общее число молекул всех типов в системе, то $H\left(\vec{c}\left(\cdot\right)\right)$ является функционалом Ляпунова детерминированной кинетической динамики Гульдберга-Вааге со сносом и диффузией (описываемой системой эволюционных уравнений Ланжевена), полученной в результате предельного перехода $M \to \infty$ (в гидродинамическом или диффузионном приближении) из исходно стохастической марковской динамики.

Вопрос о представимости инвариантных мер в виде (1), (2) затронут в [5] и не много в [4]. Функция $H\left(\vec{c}\right)$ в (1) имеет вид энтропии, если выполняется условие унитарности (обобщение условия детального баланса), предложенное в [2] и независимо в [5]. В работе [1] показано, что условие унитарности не только достаточно, но и в некотором смысле необходимо для этого.

В докладе планируется описать текущее состояние исследования авторов, направленного на распространение этих результатов на распределенные системы с пространственной диффузией. Настоящие исследования мотивированы приложениями в математической биологии. В частности, в связи с принципом эволюционной оптимальности [6].

Литература

[1] Гасников А.В., Гасникова Е.В. Об энтропийно-подобных функционалах, возникающих в стохастической химической кинетике при концентрации инвариантной меры и в качестве функций Ляпунова динамики квазисредних // Математические заметки. 2013. Т. 94. № 6. С. 816–824.

[2] Батищева Я.Г., Веденяпин В.В. II-й закон термодинамики для химической кинетики // Мат. мод. 2005. Т. 17. № 8. С. 106–110.

[3] Калинкин А.В. Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием // УМН. 2002. Т. 57. №2 (344). С. 23–84.

[4] Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.

[5] Малышев В.А., Пирогов С.А. Обратимость и необратимость в стохастической химической кинетике // УМН. 2008. Т. 63. № 1. С. 3–36.

[6] Разжевайкин В.Н. Анализ моделей динамики популяции. М.: МФТИ, 2010.

Функции гипергеометрического типа от двух комплексных переменных

Голубева В.А. (Россия)
Московский авиационный институт
goloubeva@yahoo.com

В докладе исследуется связь структуры интеграла типа Доценко-Фатеева со структурой интегралов для гипергеометрических функций Кампе де Ферье. Установлено, что интегралы типа Доценко-Фатеева удовлетворяют системе Пфаффа типа Фукса, в то время как не все гипергеометрические функции двух переменных являются решениями фуксоввых систем. Предлагается процедура исследования этих исключительных функций в точках сингулярного дивизора.

Классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов с двумерным неблуждающим множеством[9]

Гринес В.З. (Россия)
Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского
vgrines@yandex.ru

Доклад посвящен экспозиции результатов, полученных в серии работ [1]—[5] по классификации диффеоморфизмов трехмерных многообразий, неблуждающее множество которых состоит из базисных множеств размерности два. В 1971 году Р.В. Плыкиным было доказано, что двумерное базисное множество диффеоморфизма, удовлетворяющего аксиоме А. С. Смейла, является либо аттрактором либо репеллером, при этом если аттрактор (репеллер) является растягивающимся (сжимающимся), то он локально устроен как произведение канторовского множества на диск. В.З. Гринесом и Е.В. Жужомой было доказано, что любой структурно устойчивый диффеоморфизм, содержащий двумерный растягивающийся аттрактор (сжимающийся репеллер) топологически сопряжен диффеоморфизму, полученному из диффеоморфизма Д.В. Аносова с помощью хирургической операции С. Смейла.

Двумерное базисное множество, принадлежащее инвариантной двумерной поверхности, называется поверхностным. Недавно Р. Браун доказал, что если двумерное базисное множество не является растягивающимся (сжимающимся) двумерным аттрактором (репеллером), то оно является поверхностным. Многообразие, допускающее диффеоморфизм, неблуждающее множество которых состоит из двумерных поверхностных базисных множеств, диффеоморфно фактору прямого произведения двумерного тора на отрезок посредством склеивающего диффеоморфизма, индуцированного целочисленной унимодулярной матрицей, которая является либо гиперболической, либо тождественной, либо минус тождественной. Более того, если рассматриваемый диффеоморфизм является структурно устойчивым, то он топологически сопряжен с некоторым представителем из класса модельных частично гиперболических и динамически когерентных диффеоморфизмов, классификация которых получена на алгебраическом языке.

Литература

[1] Grines, V. and Zhuzhoma, E. On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors // Trans. Amer. Math. Soc., 2005, vol. 357, no. 2, pp. 617–667.

[2] Гринес В.З., Медведев В.С., Жужома Е.В. О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях // Матем. заметки, 78:6 (2005), 813–826

[3] Гринес В.З., Левченко Ю.А. О топологической классификации диффеоморфизмов трехмерных многообразий с двумерными поверхностными аттракторами и репеллерами // Доклады Академии Наук, 2012, т. 447, № 2, 127–129.

[9]Автор благодарит гранты РФФИ № 12-01-00672-а, 13-01-12452-офи-м и РНФ № 14-11-00446 за частичную финансовую поддержку.

[4] Гринес В.З., Левченко Ю.А., Починка О.В. О топологической классификации диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами // Нелинейная динамика, 2014, т. 10, № 1, 17–33.

[5] Grines V., Levchenko Yu., Medvedev V., Pochinka O. On dynamical coherence of structurally stable 3-diffeomorphisms // Regular and Chaotic Dynamics, 2014, expects to publishing.

О включении в поток и топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла[10]

Гуревич Е.Я. (Россия)
Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского
elena_gurevich@list.ru

Напомним, что диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ гладкого замкнутого многообразия M^n размерности n называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если его неблуждающее множество Ω_f конечно и состоит из гиперболических периодических точек, и устойчивые и неустойчивые многообразия периодических точек либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально. Множество диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразии M^n будем обозначать через $MS(M^n)$.

Будем говорить, что диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ включается в C^k-гладкий поток, если f является сдвигом на единицу времени вдоль траекторий такого потока. Дж. Палис в работе [1] показал, что множество C^r-диффеоморфизмов, $r \geq 1$, включающихся в C^1-потоки, является множеством первой категории в пространстве $Diff^r(M^n)$. В то же время, из структурной устойчивости диффеоморфизмов Морса-Смейла следует, что существует открытое в $Diff^r(M^n)$ множество диффеоморфизмов, включающихся в топологический поток (например, окрестность сдвига на единицу времени вдоль градиентно-подобного потока). В работе [2] получены следующие необходимые условия включения диффеоморфизма Морса-Смейла в топологический поток (далее — условия Палиса):

1) множество Ω_f состоит из неподвижных точек;

2) ограничение диффеоморфизма f на каждое инвариантное многообразие любой неподвижной точки $p \in \Omega_f$ сохраняет его ориентацию;

3) если для различных седловых точек $p, q \in \Omega_f$ пересечение инвариантных многообразий $W^s_p \cap W^u_q$ непусто, то каждая его компонента связности не является замкнутым множеством.

Там же показано, что при $n = 2$ эти условия являются достаточными, и поставлена задача нахождения соответствующих условий в случае большей размерности.

В работе [3] обнаружено, что в случае размерности $n = 3$ дополнительным препятствием для включения диффеоморфизма $f \in MS(M^3)$ в топологический поток является возможность дикого вложения инвариантных многообразий седловых точек, а ключом к решению этой задачи является топологическая классификация соответствующих систем. При помощи новых топологических инвариантов, полученных В.З. Гринесом и О.В. Починкой для диффеоморфизмов из $MS(M^3)$, в [3] были найдены необходимые и достаточные условия включения диффеоморфизма $f \in MS(M^3)$ в топологический поток.

В докладе излагается следующий результат, контрастирующий с трехмерной ситуацией. Пусть $G(S^n)$ — класс диффеоморфизмов Морса-Смейла без гетероклинических пересечений, заданных на сфере S^n размерности $n > 3$, и удовлетворяющих условиям Палиса.

[10] Автор благодарит гранты РФФИ № 12-01-00672-а, 13-01-12452-офи-м и РНФ № 14-11-00446 за частичную финансовую поддержку.

Теорема *Любой диффеоморфизм $f \in G(S^n)$ включается в топологический поток.*

Литература

[1] Palis J. Vector fields generate few diffeomorphisms // Bull. Amer. Math. Soc. – 1974, V. 80. P. 503-505.

[2] Palis J. On Morse-Smale dynamical systems // Topology. 1969. V. 8, № 4, 385-404.

[3] Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С., Починка О.В. О включении диффеоморфизмов Морса-Смейла на 3-многообразии в топологический поток // Матем. сб., 203:12 (2012), 81–104.

Об асимптотике решения уравнения в частных производных первого порядка в случае смены устойчивости

Деркунова Е.А. (Россия)
Южно-Уральский государственный университет (НИУ)
elena.derkunova@rambler.ru

Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(u,x,t) \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0,\varepsilon) = u^0(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр.

Решение $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (1), (2) ищется в области $D = \{(x,t) : x_0(t) \le x \le x_1(t), 0 \le t \le T\}$, где $x = x_0(t)$ и $x = x_1(t)$ – характеристики, выходящие соответственно из точек $(0,0)$ и $(1,0)$ и определяемые уравнением $\dfrac{dx}{dt} = \Lambda(x,t)$ (считаем, что $\Lambda(x,t)$ – гладкая функция и все характеристики, выходящие из точек начального отрезка $\{t = 0,\ 0 \le x \le 1\}$ существуют при $0 \le t \le T$). Вырожденное уравнение для (1) имеет вид:

$$f(u,x,t) = 0 \tag{3}$$

Пусть уравнение (3) имеет корни $u = \varphi_1(x,t)$ и $u = \varphi_2(x,t)$, пересекающиеся по некоторой кривой, проекция которой на плоскость (x,t) лежит в области D.

В статье [1] рассматривался случай, когда проекция линии пересечения корней выходит на начальный отрезок, при выполнения следующего условия на функцию f: функция правой части уравнения (1) зависит от $\varepsilon^{\frac{1}{p}}$ и имеет вид

$$f(u,x,t,\varepsilon) = -k(x,t)\,(u - \varphi_1(x,t))\,(u - \varphi_2(x,t)) + \varepsilon^{\frac{1}{p}} f_1(u,x,t,\varepsilon^{\frac{1}{p}}),$$

где $p > 1$, k, φ_1, φ_2, f_1 – достаточно гладкие функции, $k(x,t) > 0$ в области D.
Здесь мы продолжим изучение задачи статьи [1]: будем рассматривать случай, когда корни вырожденного уравнения пересекаются по линии, проекция которой выходит на начальный отрезок, но откажемся от непосредственной регуляризации правой части (1), связанной с членом порядка $\varepsilon^{\frac{1}{p}}$, $p > 1$. При этом наложим на функцию правой части следующее условие
Условие A_1. Функция $f(u,x,t)$ имеет вид

$$f(u,x,t) = -k(x,t)\,(u - \varphi_1(x,t))\,(u - \varphi_2(x,t))\,,$$