Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Челябинский государственный университет

Г.А. Свиридюк Г.А. Кузнецов

Математический анализ II

Учебное пособие

Челябинск 1999

Содержание

1 КОНЕЧНОМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

... А она отвернулась, вздернув
носик, и Том услышал:
— Пф! Некоторые только и делают,
что ломаются; думают, что это
кому-нибудь интересно!
Марк Твен. "Приключения Тома Сойера"

1 Определение и метрическая структура множества $\mathbb{R}^n$

Любая математическая теория изучает объекты двух видов — множества и отображения. Среди всех множеств данной теории принято выделять некоторое универсальное множество, называемое *универсумом.* Основное свойство универсума заключается в том, что все остальные множества являются его подмножествами. Универсумом конечномерного математического анализа служит n-мерное координатное пространство.

Определение 1.1 Множество всевозможных упорядоченных наборов $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, состоящих из n действительных чисел $x^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, будем называть *n-мерным координатным пространством* $\mathbb{R}^n$. Другими словами, множество $\mathbb{R}^n$ — декартово произведение n экземпляров множества $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ сомножителей}} .$$

Простыми примерами множества $\mathbb{R}^n$ являются плоскость (при $n = 2$) и пространство (при $n = 3$) с фиксированными системами прямоугольных координат. Каждый набор $(x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ будем обозначать одной буквой $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и в соответствии с указанной геометрической терминологией называть *точкой* пространства $\mathbb{R}^n$. Число x^i в наборе $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ будем называть *i-той координатой* точки x. В двумерном и трехмерном случаях мы часто будем прибегать к традиционным обозначениям ((x, y) и (x, y, z)) координат.

Пространство $\mathbb{R}^n$ само по себе — не очень интересный для наблюдения и не очень нужный нам объект. Пользы от этого пространства будет гораздо больше, если наделить его метрической структурой.

Определение 1.2 Пусть X — произвольное множество, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ — отображение, ставящее каждой упорядоченной паре (x, y) элементов множества X в соответствие действительное число. Отображение d *задает метрическую структуру на множестве* X, если

(i) $\forall x, y \in X \ (d(x, y) \geq 0)$;

(ii) $(d(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$;

(iii) $\forall x, y \in X \ (d(x, y) = d(y, x))$;

(iv) $\forall x, y, z \in X \ (d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z))$.

Отображение d в этом случае называется *метрикой* или *расстоянием* на множестве X, а пара (X, d) — *метрическим пространством.*

Упражнение 1.1 Показать, что множество действительных чисел $\mathbb{R}$ с отображением $d_a(x, y) = a|x - y|$, где $a > 0$, является метрическим пространством.

Упражнение 1.2 Показать, что множество $C[a, b]$ (т. е. множество непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций) с отображением $d(f, g) = \max\limits_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$ является метрическим пространством.

Нашей целью является задание метрической структуры на множестве $\mathbb{R}^n$. Покажем, что это можно сделать посредством отображения

$$d_n(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1}$$

где $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, а $y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$. Для этого установим *неравенство Коши*[1]*-Буняковского*[2].

[1]Огюстен Луи Коши (1789-1857) — французский математик. Один из основоположников теорий функций, математического анализа и математической физики.

[2]Виктор Яковлевич Буняковский (1804-1889) — русский математик, прославившийся работами по неравенствам.

Лемма 1.1 *Пусть числа $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

○ Если все числа $a_i = 0$, то неравенство Коши-Буняковского очевидно. Пусть существует число $a_i \neq 0$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0\,.$$

Рассмотрим функцию

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} (a_i t + b_i)^2 = t^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2t \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2\,. \tag{1.2}$$

Очевидно, $\forall t \in \mathbb{R}$ $(F(t) \geq 0)$, поэтому квадратный трехчлен (1.2) имеет либо два одинаковых корня, либо не имеет корней вовсе. Значит, его дискриминант неположителен, т. е.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq 0\,. \bullet$$

Следствие 1.1 *В условиях леммы 1.1 справедливо следующее неравенство:*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.3}$$

○

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 . \bullet$$

Теперь у нас все готово для получения главного результата данного параграфа.

Теорема 1.1 *Отображение d_n, определенное формулой (1.1), задает метрическую структуру на множестве $\mathbb{R}^n$.*

$\circ$ Действительно, отображение d_n из (1.1) каждым двум точкам $x, y \in \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие число и очевидно удовлетворяет аксиомам (i)-(iii) определения 1.2. Проверим выполнение аксиомы (iv). Для этого в (1.3) положим

$$a_i = x^i - y^i\,,\ b_i = y^i - z^i\,,\ i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

где $(x^1, x^2, \ldots, x^n) = x$ и $(y^1, y^2, \ldots, y^n) = y$ — произвольные точки из $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$a_i + b_i = x^i - z^i\,,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

и потому

$$d_n(x, z) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x^i - z^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} (y^i - z^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = d(x, y) + d_n(y, z) \,. \bullet$$

Замечание 1.1 Поскольку $d_1(x, y) = |x - y|$, то в дальнейшем метрику d_n пространства $\mathbb{R}^n$ будем обозначать символом

$$|x - y|_n = d_n(x, y)\,.$$

2 Последовательности в метрическом пространстве и полнота множества $\mathbb{R}^n$

Пусть (X, d) — метрическое пространство. Напомним, что *последовательностью точек* $x_k \in X$ называется отображение $\mathbb{N} \to X$, которое обозначают символом $\{x_k\}$.

Определение 2.1 Последовательность точек $\{x_k\}$ метрического пространства (X, d) *сходится к точке* $a \in X$ (*имеет предел* $a \in X$), если

$$\lim_{k \to \infty} d(x_k, a) = 0\,.$$

В таком случае пишут

$$\lim_{k \to \infty} x_k = a\,.$$

Последовательность $\{x_k\}$ точек метрического пространства (X, d) называется *ограниченной*, если

$$\forall a \in X \;\; \exists c \in \mathbb{R} \;\; \forall k \in \mathbb{N} \;\; (d(x_k, a) \le c)\,.$$

Теорема 2.1 *Пусть $\{x_k\}$ — последовательность точек метрического пространства (X, d). Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) если последовательность $\{x_k\}$ сходится, то она ограничена;

(ii) последовательность $\{x_k\}$ не может сходиться к двум разным пределам;

(iii) последовательность $\{x_k\}$ точек $x_k = (x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^n) \in \mathbb{R}^n$ сходится к точке $a = (a^1, a^2, \ldots, a^n) \in \mathbb{R}^n$ точно тогда, когда каждая числовая последовательность $\{x_k^i\}$ сходится к числу a^i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

$\circ$ (i) Пусть $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = a$, тогда в силу определения 2.1 $\lim\limits_{k \to \infty} d(x_k, a) = 0$. Отсюда в силу свойств числовых последовательностей получаем, что последовательность $\{d(x_k, a)\}$ ограничена, т. е.

$$\exists c \in \mathbb{R} \;\; \forall k \in \mathbb{N} \;\; (d(x_k, a) \le c)\,.$$

(ii) Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = b$, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k, a) = 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k, b) = 0$. В силу (i), (iii) и (iv) определения 1.2 имеем

$$0 \le d(a,b) \le d(x_k, a) + d(x_k, b)\,.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим $d(a,b) = 0$.

(iii) Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k - a|_n = 0$. Поэтому при всех $i = 1, 2, \ldots, n$ имеем

$$0 \le |x_k^i - a^i| \le \left(\sum_{j=1}^{n} (x_k^j - a)^2\right)^{\frac{1}{2}} = |x_k - a|_n \to 0$$

при $k \to \infty$.

Наоборот, если $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^i = a^i$, то $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k^i - a^i| = 0$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Значит,

$$\lim_{k\to\infty} |x_k - a|_n = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_k^i - a^i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0\,.\bullet$$

Определение 2.2 Последовательность $\{x_k\}$ точек метрического пространства (X, d) называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall k, m > N \;\; (d(x_k, x_m) < \varepsilon)\,.$$

Теорема 2.2 *Если последовательность* $\{x_k\}$ *точек метрического пространства* (X, d) *сходится, то она фундаментальна.*

$\circ$ Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \begin{cases} \forall k > N \;\; (d(x_k, a) < \frac{\varepsilon}{2})\,; \\ \forall l > N \;\; (d(x_l, a) < \frac{\varepsilon}{2})\,. \end{cases}$$

Отсюда

$$d(x_k, x_l) \le d(x_k, a) + d(x_l, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.\bullet$$

Обратное не верно, что показывает следующий

Пример 2.1 Пусть $X = (0,1]$, а $d(x,y) = |x-y|$. Очевидно, что (X,d) — метрическое пространство. Рассмотрим последовательность $\{\frac{1}{k}\} \subset X$. Эта последовательность фундаментальна, но не сходится ни к одной точке множества X.

Определение 2.3 Метрическое пространство (X,d) называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность его точек сходится.

Пример 2.2 В силу критерия Коши сходимости числовой последовательности множество действительных чисел $\mathbb{R}$ с метрикой d_1 — полное метрическое пространство.

Теорема 2.3 $(\mathbb{R}^n, d_n)$ — *полное метрическое пространство.*

○ Пусть $\{x_k\}$ — фундаментальная последовательность точек в $\mathbb{R}^n$. Поскольку

$$|x_k^i - x_l^i| \leq |x_k - x_l|_n\,,\ i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

то координатные последовательности $\{x_k^i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, тоже будут фундаментальными последовательностями в $\mathbb{R}$, и в силу критерия Коши для числовых последовательностей последовательности $\{x_k^i\}$, $i = 1, \ldots, n$, будут сходиться. В силу (iii) теоремы 2.1 последовательность $\{x_k\}$ также будет сходиться. •

3 Подмножества метрического пространства

В дальнейшем отождествим множество X и метрическое пространство (X,d). Это отождествление значительно упростит наше изложение, т.к. вместо того, чтобы писать “пусть (X,d) — метрическое пространство, а множество $M \subset X$”, мы будем писать “пусть множество $M \subset X$”, подразумевая, что $X \equiv (X,d)$.

Итак, пусть X — метрическое пространство. Одним из важнейших его подмножеств является *шар радиуса* $r > 0$ *с центром* $a \in X$

$$B_r(a) = \{x \in X : d(x,a) < r\}\,.$$

Пример 3.1 Если $X = \mathbb{R}$, то шар $B_r(a)$ — это интервал $(a - r, a + r)$. Если $X = \mathbb{R}^2$, то шар $B_r(a)$ — это круг $\{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : (x^1 - a^1)^2 + (x^2 - a^2)^2 < r^2\}$.

Определение 3.1 Пусть множество $M \subset X$. Точка $x_0 \in M$ называется *внутренней точкой* множества M, если

$$\exists r > 0 \ \ (B_r(x_0) \subset M)\,.$$

Множество всех внутренних точек множества M называется *внутренностью* множества M и обозначается символом $\mathring{M}$. Если $M = \mathring{M}$, то множество M называется *открытым.* Пустое множество $\emptyset$ считается *открытым по определению.*

Замечание 3.1 Если метрическое пространство X является универсумом, то оно также считается *открытым по определению.*

Пример 3.2 Шар $B_r(a)$ в метрическом пространстве X — открытое множество.

Действительно, пусть точка $x_0 \in B_r(a)$, т. е. $d(x_0, a) < r$. Возьмем $0 < \varepsilon < r - d(x_0, a)$. Шар $B_\varepsilon(x_0) \subset B_r(a)$, поскольку для любой точки $x \in B_\varepsilon(x_0)$ имеем

$$d(x, a) \leq d(x, x_0) + d(x_0, a) < \varepsilon + d(x_0, a) < r - d(x_0, a) + d(x_0, a) = r$$

в силу аксиом метрики (см. определение 1.2).

Установим некоторые простые свойства открытых множеств.

Теорема 3.1 *(i) Объединение любой совокупности открытых множеств — открытое множество.*

(ii) Пересечение конечного числа открытых множеств — открытое множество.

○ (i) Пусть $M = \cup M_i$, M_i — открытые подмножества X. Возьмем точку $x \in M$. Существует M_i такое, что $x \in M_i$. Поскольку M_i открыто, то существует шар $B_r(x) \subset M_i$. Поскольку $B_r(x) \subset M$, то M открыто.

(ii) Пусть $M = \bigcap\limits_{i=1}^{m} M_i$, M_i — открытые подмножества X. Возьмем точку $x \in M$. Тогда $x \in M_i$, $i = 1, \ldots, m$. Поскольку M_i открыты, то существуют шары $B_{\varepsilon_i}(x) \subset M_i$. Возьмем $\varepsilon = \min \varepsilon_i$. Тогда $B_\varepsilon(x) \subset M_i$, $i = 1, \ldots, m$, и потому $B_\varepsilon(x) \subset M$. ●

Определение 3.2 Пусть X — метрическое пространство. *Окрестностью* O_{x_0} точки $x_0 \in X$ будем называть любое открытое множество, содержащееся в X и содержащее точку x_0. Точка $x_0 \in X$ называется *предельной точкой* множества $M \subset X$, если в любой окрестности точки x_0 содержится бесконечное множество точек множества M. Точка множества M, не являющаяся предельной точкой множества M, называется *изолированной точкой* множества M. Множество $M \subset X$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Множество, получающееся после присоединения к множеству M всех его предельных точек, называется *замыканием* множества M и обозначается $\overline{M}$.

Предельная точка может принадлежать множеству M, а может и не принадлежать. Каждая изолированная точка $x_0 \in M$ имеет окрестность O_{x_0} такую, что $O_{x_0} \cap M = \{x_0\}$. Каждая точка множества M является либо предельной, либо изолированной точкой.

Теорема 3.2 *Пусть X — метрическое пространство. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(i) Множество $M \subset X$ замкнуто.

(ii) Множество $X \setminus M$ открыто.

○ ($\Rightarrow$) Пусть $M \subset X$ замкнуто, т. е. содержит все свои предельные точки. Докажем, что $N = x \setminus M$ — открытое множество. Если это не так, то существует точка $x \in N$ такая, что $x \notin \overset{\circ}{N}$. Тогда в любой окрестности O_x есть точки, не принадлежащие N, т. е. принадлежащие M. Поэтому x есть предельная точка множества M, следовательно, $x \in M$. Но $N \cap M = \emptyset$. Противоречие.

($\Leftarrow$) Пусть множество $N = X \setminus M$ открыто. Покажем, что M замкнуто. Пусть x — предельная точка M, предположим, что $x \notin M$. Тогда $x \in N$, и в силу открытости N существует окрестность $O_x \subset N$. Отсюда $O_x \cap M = \emptyset$ и, следовательно, x — не предельная точка M. Противоречие. •

Из теоремы 3.2 непосредственно следует, что множества X и $\emptyset$ замкнуты. Кстати сказать, это единственные подмножества универсума X являющиеся одновременно и замкнутыми, и открытыми.

Упражнение 3.1 Доказать, что

(i) пересечение любой совокупности замкнутых множеств — замкнутое множество;

(ii) Объединение конечного числа замкнутых множеств — замкнутое множество.

Определение 3.3 Множество $M \subset X$ называется *компактным*, если из любой последовательности $\{x_k\} \subset M$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к точке, принадлежащей множеству M.

Напомним, что *подпоследовательностью* последовательности $\{x_k\}$ называется композиция последовательности $\{x_k\}$ и возрастающей последовательности $\{k_l\}$ натуральных чисел.

Ниже мы приведем некоторые основные свойства компактных множеств, а сейчас введем еще одно важное понятие.

Определение 3.4 Множество $M \subset X$ называется *ограниченным*, если существует шар $B_r(a) \subset X$ такой, что $M \subset B_r(a)$.

Упражнение 3.2 Пусть $M \subset X$ есть последовательность точек $\{x_k\}$. Доказать, что определения 2.1 и 3.4 эквивалентны.

Теорема 3.3 *Компактное множество в метрическом пространстве замкнуто и ограничено.*

$\circ$ Докажем замкнутость. Пусть $M \subset X$ — компакт, и $a \in X$ — предельная точка множества M. Покажем, что $a \in M$. Рассмотрим систему шаров

$$B_{\frac{1}{k}}(a) = \{x \in X : d(x,a) < \frac{1}{k}\}\,,\ k \in \mathbb{N}\,.$$

Поскольку $B_{\frac{1}{k}}(a) \cap M \neq \emptyset$, то в каждом шаре $B_{\frac{1}{k}}(a)$ выберем точку, принадлежащую M, которую обозначим через x_k. Последовательность $\{x_k\} \subset M$ и сходится к a, поскольку

$$0 \le d(x_k, a) < \frac{1}{k} \to 0\ \ (k \to \infty)\,.$$

Ввиду компактности M точка $a \in M$.

Докажем ограниченность. Предположим, что M — неограниченное множество. Тогда возьмем $a \in M$ и рассмотрим систему шаров

$$B_k(a) = \{x \in X : d(x,a) < k\}\,,\ k \in \mathbb{N}\,.$$

Поскольку M неограничено, то $B_k(a)$ не содержит M ни при каком $k \in \mathbb{N}$. С другой стороны, $\forall k \in \mathbb{N}$ $(B_k(a) \cap M \neq \emptyset)$.

Стало быть, можно выбрать последовательность $\{x_k\} \subset M$ такую, что $k \le d(x_k, a) < k+1$. В силу свойства (iv) метрики при $l > k+1$ имеем

$$d(x_k, x_l) \ge d(x_l, a) - d(x_k, a)$$

Откуда
$$d(x_k, x_l) \geq l - (k+1) \geq 1\,,$$
т. е. из последовательности $\{x_k\}$ невозможно выбрать сходящуюся подпоследовательность. •

В заключение параграфа введем и обсудим очень важное в дальнейшем понятие.

Определение 3.5 Точка $x \in X$ метрического пространства X называется *граничной точкой* множества $M \subset X$, если для любой окрестности O_x имеем $O_x \cap M \neq \emptyset$ и $O_x \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$. Множество всех граничных точек множества M называется *границей* множества M и обозначается символом ∂M.

Теорема 3.4 *Пусть X — метрическое пространство и множество $M \subset X$. Тогда $\partial M = \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M}$.*

∘ Пусть $x \in \partial M$. Поскольку для любой окрестности O_x имеем $O_x \cap M \neq \emptyset$, то x — предельная точка M, т. е. $x \in \overline{M}$; а поскольку $O_x \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$, то x не является внутренней точкой множества M и потому $x \notin \overset{\circ}{M}$.

Пусть $x \in \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M}$. Поскольку $x \in \overline{M}$, то $O_x \cap M \neq \emptyset$ для любой окрестности O_x. Поскольку $x \notin \overset{\circ}{M}$, то $O_x \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$ для любой окрестности O_x. Поэтому $x \in \partial M$. •

4 Основные теоремы о множествах пространства $\mathbb{R}^n$

В конечномерном анализе существуют естественные обобщения теорем о вложенных отрезках, о конечном покрытии и о предельной точке. Однако все эти утверждения мы приводить не будем; ограничимся только теми, которые будут нам полезны в дальнейшем. Начнем с обобщения теоремы Больцано[3]-Вейерштрасса[4] (которая, как мы знаем, является следствием теоремы о предельной точке).

[3]Бернард Больцано (1781-1848) — чешский математик, философ, богослов. Основные работы относятся к теории множеств, математическому анализу, механике и физике.

[4]Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815-1897) — немецкий математик. Основные работы в области математического анализа и теории аналитических функций.

Теорема 4.1 *Из любой ограниченной последовательности точек пространства* $\mathbb{R}^n$ *можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

○ Пусть последовательность $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ ограничена. Отсюда следует ограниченность каждой ее координатной последовательности:

$$|x_k^j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n}(x_k^j)^2\right)^{\frac{1}{2}} < c\,,\ \ i = 1, \ldots, n\,,\ \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

В силу теоремы Больцано-Вейерштрасса из последовательности $\{x_k\}$ выделим подпоследовательность $\{x_{k_l}\}$, координатная последовательность $\{x_{k_l}^1\}$ которой сходится, скажем, к x_0^1. Затем из последовательности $\{x_{k_l}\}$ выделим подпоследовательность $\{x_{k_{l_m}}\}$, координатная последовательность $\{x_{k_{l_m}}\}$ которой сходится, скажем, к x_0^2. Поступив таким же образом и со всеми остальными координатными последовательностями, мы получим требуемую подпоследовательность. •

Следствие 4.1 *Множество* $M \subset \mathbb{R}^n$ *компактно точно тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

○ Необходимость следует из теоремы 3.3. Докажем достаточность. Пусть множество $M \subset \mathbb{R}^n$ ограничено и замкнуто. Возьмем произвольную последовательность $\{x_k\} \subset M$. Ввиду ее ограниченности выберем подпоследовательность $\{x_{k_l}\} \subset \{x_k\}$, сходящуюся к точке $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$. В силу замкнутости M точка $x_0 \in M$. •

Прежде чем обобщить утверждение, известное в одномерном анализе как теорема Коши-Кантора[5], дадим следующее

Определение 4.1 Множество

$$\prod\nolimits_a^b = \{x \in \mathbb{R}^n : a^i \leq x^i \leq b^i\,,\ i = 1, 2, \ldots, n\}\,.$$

где $a = (a^1, a^2, \ldots, a^n)$, $b = (b^1, b^2, \ldots, b^n)$, будем называть *$n$-мерным прямоугольником* (или просто — *прямоугольником*).

[5]Георг Кантор (1845-1918) — немецкий математик. Основоположник теории множеств.

В одномерном случае прямоугольник $\prod_a^b = [a, b]$; в двумерном случае — $\prod_a^b = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^1 \leq x \leq b^1, a^2 \leq y \leq b^2\}$.

Упражнение 4.1 Доказать, что множество $\prod_a^b$ компактно.

Определение 4.2 Число

$$D = \left(\sum_{i=1}^{n} (b^i - a^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

называется *диаметром* прямоугольника $\prod_a^b \subset \mathbb{R}^n$.

Нетрудно заметить, что в случае $n = 1$ диаметр $\prod_a^b$ есть длина отрезка $[a, b]$, а в случае $n = 2, 3$ диаметр $\prod_a^b$ есть длина главной диагонали.

Теорема 4.2 *Пусть дана последовательность* $\{\prod_k\}$ *прямоугольников* $\prod_k = \prod_{a_k}^{b_k}$, *вложенных друг в друга. Тогда существует точка* $c \in \mathbb{R}^n$, *принадлежащая всем прямоугольникам. Если последовательность* $\{D_k\}$ *диаметров этих прямоугольников стремится к нулю, то такая точка* c *является единственной.*

$\circ$ Из условия следует, что для всех $i = 1, \ldots, n$ отрезки $[a_k^i, b_k^i]$ вложены друг в друга. Поэтому из теоремы Коши-Кантора следует существование точки $c^i \in [a_k^i, b_k^i]$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Причем, если

$D_k \to 0$, то и длины всех отрезков $|b_k^i - a_k^i| \to 0$ при $k \to \infty$, $i = 1, \ldots, n$. Поэтому в случае $D_k \to 0$ при $k \to \infty$ точка $c = (c^1, c^2, \ldots, c^n)$ единственная. •

Теорема о конечном покрытии (Бореля[6]-Лебега[7]) был обобщен на произвольное метрическое пространство X немецким математиком Г.Э. Гейне[8]. Мы рассмотрим теорему Гейне-Бореля-Лебега лишь в частном случае $X = \mathbb{R}^n$.

Определение 4.3 Совокупность открытых множеств $\{O_i : O_i \in \mathbb{R}^n, i \in I\}$ называется *открытым покрытием* множества $X \subset \mathbb{R}^n$, если $X \subset \bigcap\limits_{i \in I} O_i$. Открытое покрытие $\{O_i\}$ называется *конечным*, если множество I конечно.

Теорема 4.3 *Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ компактно точно тогда, когда из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.*

◦Доказательство необходимости проведем в случае $n = 2$, поскольку в этом случае оно очень наглядно. В общем случае оно проводится аналогично.

Итак, пусть множество $M \subset \mathbb{R}^2$ — компакт. Предположим, что существует его открытое покрытие, из которого нельзя выбрать конечного подпокрытия. Пусть $\{O_i\}$ — такое открытое покрытие множества M. В силу теоремы 4.1 множество M ограничено, поэтому существует прямоугольник $\prod_a^b \supset M$. Разделим $\prod_a^b$ на четыре равные части.
В силу предположения среди получившихся прямоугольников найдется по крайней мере один (допустим $\prod_1$) такой, что множество $\prod_1 \cap M$ нельзя покрыть конечным числом множеств из $\{O_i\}$.

---

[6]Эмиль Борель (1871-1956) — французский математик. Работы относятся к теории функций, теории вероятностей, теории чисел, алгебре, геометрии и математическому анализу.

[7]Анри Леон Лебег (1875-1941) — французский математик. Работы относятся к теории функций и теории интегрирования.

[8]Генрих Эдуард Гейне (1821-1881) — немецкий математик. Основные направления исследований — основания математики, математическая физика и теория функций.

Разделим $\prod_1$ на четыре части аналогично предыдущему и укажем прямоугольник $\prod_2$, для которого утверждение теоремы не верно. Продолжив процесс неограниченно, получим последовательность $\{\prod_k\}$ вложенных друг в друга прямоугольников, диаметры которых стремятся к нулю, причем для этих прямоугольников утверждение теоремы не верно.

В силу теоремы 4.2 существует единственная точка $c \in \mathbb{R}^2$ такая, что $c \in \prod_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$. В силу замкнутости M точка c принадлежит M, и поэтому накрыта некоторым множеством O_i, т. е. $c \in O_i$. Ввиду открытости O_i имеет место включение $O_i \supset \prod_k$ для достаточно большого k. Мы пришли к противоречию, поскольку с одной стороны, не существует никакой конечной подсистемы O_i, покрывающей $\prod_k$, а с другой — $\prod_k$ покрывается одним множеством.

Теперь докажем достаточность, т. е. предположим, что из любого открытого покрытия множества $M \subset \mathbb{R}^n$ можно выбрать конечное подпокрытие. Покажем, что M ограничено и замкнуто. Чтобы доказать ограниченность M, выберем произвольно $r > 0$ и рассмотрим систему шаров $\{B_r(x) : x \in M\}$. Очевидно, $\{B_r(x)\}$ — открытое покрытие M. Пусть $\{B_r(x_1), \ldots, B_r(x_m)\}$ — конечное подпокрытие, тогда шар $B_R(x_1) \supset B_r(x_i)$ $\forall i = 1, \ldots, m$, если $R > 2mr$ и, следовательно, $B_R(x_1) \supset M$, т. е. M ограничено.

Чтобы доказать замкнутость M, достаточно (в силу теоремы 3.2) показать открытость $\mathbb{R}^n \setminus M$. Пусть точка $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M$. Окружим каждую точку $x \in M$ шаром $B_r(x)$ радиуса

$$r = \frac{|x - x_0|_n}{2}\,.$$

откуда $x_0 \notin \overline{B}_r(x)$ при любом $x \in M$. Система $\{B_r(x)\}$ образует, очевидно, покрытие M. Выберем конечное подпокрытие

$$\{B_r(x_1), \ldots, B_r(x_m)\}\,,$$

причем $M \subset \cup \overline{B}_r(x_i)$.

Поскольку $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_r(x_i)$, то $x_0 \in \cap(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_r(x_i))$ — открытому множеству. Но так как

$$\bigcap_{i=1}^{m}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_r(x_i)) = \mathbb{R}^n \setminus (\bigcup_{i=1}^{m} \overline{B}_r(x_i)) \subset \mathbb{R}^n \setminus M\,,$$

то x_0 — внутренняя точка множества $\mathbb{R}^n \setminus M$. Следовательно $\mathbb{R}^n \setminus M$ открыто, а множество M — замкнуто. •

5 Линейная и евклидова структура множества $\mathbb{R}^n$

Определение 5.1 Говорят, что на множестве X задана *линейная структура*, если на нем

(i) определено аддитивное отображение (операция сложения)

$$+ : X \times X \to X \ \ (\text{ т. е. } \forall x, y \in X((x + y) \in X))$$

со следующими свойствами:

$$\forall x, y \in X \ \ (x + y = y + x) \text{ — коммутативность;}$$

$$\forall x, y, z \in X \ \ (x + (y + z) = (x + y) + z) \text{ — ассоциативность;}$$

$$\exists \mathbb{O} \in X \ \ \forall x \in X \ \ (x + \mathbb{O} = x)$$

— существование нейтрального элемента;

$$\forall x \in X \ \ \exists y \in X \ \ (x + y = \mathbb{O})$$

— существование противоположного элемента;

(ii) определено мультипликативное отображение (операция умножения)

$$\cdot : \mathbb{R} \times X \to X \ \text{ (т. е. } \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall x \in X \ \ (\alpha x \in X))$$

со следующими свойствами:

$$\forall x \in X \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \ (\alpha x = x\alpha) \text{ — коммутативность;}$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in X \ \ (\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x) \text{ — ассоциативность;}$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \ \forall x, y \in X \ \ ((\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x\,, \ \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y)$$

— дистрибутивность.

Пара $(X, \mathbb{R})$ называется *линейным пространством над полем действительных чисел*, а элементы линейного пространства называются *векторами*.

Упражнение 5.1 Пусть $(X, \mathbb{R})$ — линейное пространство. Доказать, что

(i) нейтральный элемент $\mathbb{O} \in X$ единственен;

(ii) при любом $x \in X$ $\ 0 \cdot x = x \cdot 0 = \mathbb{O}$.

Определение 5.2 Говорят, что на линейном пространстве $(X, \mathbb{R})$ задана *евклидова структура*, если задано отображение

$$< \cdot, \cdot >: X \times X \to \mathbb{R}$$

такое, что

(i) $\forall x \in X \ \ (< x, x > \geq 0)$;

(ii) $(< x, x >= 0) \Leftrightarrow (x = \mathbb{O})$;

(iii) $\forall x, y \in X \ \ (< x, y >=< y, x >)$;

(iv) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \ \forall x, y \in X \ \ (< \alpha x, y >= \alpha < x, y >)$;

(v) $\forall x, y, z \in X \ \ (< x + y, z >=< x, z > + < y, z >)$.

Отображение $< \cdot, \cdot >: X \times X \to \mathbb{R}$ в этом случае называется *скалярным произведением*, а тройка $(X, \mathbb{R}, < \cdot, \cdot >)$ — *евклидовым пространством*.

Замечание 5.1 В дальнейшем ради простоты записи будем отождествлять евклидово пространство $(X, \mathbb{R}, < \cdot, \cdot >)$ и множество X.

Теорема 5.1 *Множество* $\mathbb{R}^n$ *— евклидово пространство.*

○ Для доказательства достаточно задать операции сложения, умножения на число и скалярное произведение. Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$, а $\alpha \in \mathbb{R}$. Положим

$$x + y = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \ldots, x^n + y^n)\,, \tag{5.4}$$

$$\alpha x = (\alpha x^1, \alpha x^2, \ldots, \alpha x^n)\,, \tag{5.5}$$

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x^i y^i\,. \tag{5.6}$$

Проверку того, что формулы (5.4)-(5.6) задают требуемые операции, предоставим читателю в качестве упражнения. •

Итак, на множестве $\mathbb{R}^n$ существуют две структуры — метрическая и евклидова. В соответствии с первой элементы $\mathbb{R}^n$ мы нызываем точками, а в соответствии со второй — векторами. Другими словами, каждой точке $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ ставится в соответствие вектор с “началом” в точке $(0, 0, \ldots, 0)$ и “концом” в точке x, и наоборот, каждому вектору, “растущему” из точки $(0, 0, \ldots, 0)$ можно поставить в соответствие точку, являющуюся его “вершиной”. В дальнейшем мы будем часто пользоваться этим соответствием между метрической и евклидовой структурами на $\mathbb{R}^n$, а сейчас напомним некоторые понятия линейной алгебры.

Число

$$\sqrt{< x, x >} = \left(\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.7}$$

называется *нормой вектора* $x \in \mathbb{R}^n$ и обозначается символом $|x|_n$. Сравнивая (5.7) с (1.1), нетрудно убедиться в том, что $|x|_n$

представляет собой расстояние от точки $\mathbb{O}$ до точки x. Два вектора $x, y \in \mathbb{R}^n$ называются *ортогональными*, если $< x, y >= 0$. Вектора конечнго множества $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$ называется *линейно независимыми* векторами, если

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m = 0\,.$$

Множество из n линейно независимых векторов $\{x_1, \ldots, x_m\}$ называется *базисом* пространства $\mathbb{R}^n$. Отличительной особенностью базиса является то, что любой вектор $y \in \mathbb{R}^n$ можно единственным образом представить в виде

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\,.$$

Базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$ называется *ортонормальным*, если $< e_i, e_j >= \delta_{ij}$, где δ_{ij} *символ Кронекера*[9]

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j\,; \\ 0, & i \neq j\,, \end{cases}$$

а $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Теперь пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное множество векторов. Построим квадратную матрицу порядка m

$$\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \| < x_i, x_j > \|\,,$$

которая носит название *матрицы Грама*[10]. Определитель матрицы Грама называется *определителем Грама* и обозначается символом

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \det\| < x_i, x_j > \|\,.$$

Отметим некоторые свойства матрицы и определителя Грама, которые будут полезны нам в дальнейшем.

---

[9] Леопольд Кронекер (1823-1891) — немецкий математик. Основные работы относятся к теории чисел, алгебре и теории эллиптических функций.

[10] Йорген Педерсен Грам (1850-1916) — датский математик. Основные работы по математической статистике, теории чисел и теории приближения функций.

Теорема 5.2 *(i) Матрица Грама симметрична.*

(ii) Матрица Грама положительно определена точно тогда, когда векторы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ линейно незевисимы.

(iii) Определитель Грама равен квадрату объема параллелепипеда, натянутого на векторы $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

$\circ$ Справедливость утверждения (i) и (ii) непосредственно вытекает из определений скалярного произведения и матрицы Грама. Доказательство утверждения (iii) можно найти в любом достаточно полном учебнике по линейной алгебре или в монографии по теории матриц. $\bullet$

Упражнение 5.2 Показать, что множества $C[a, b]$ и $C^k[a, b]$, $k \in \mathbb{N}$ являются линейными пространствами.

2 НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

— Господа, — очень торжественно начал
молодой, — я вам открою мою
тайну, я чувствую к вам доверие!
По происхождению я — герцог!
Марк Твен. "Приключения Гекльберри Финна"

1 Предел функции многих переменных

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — некоторое множество. Отображение $f : X \to \mathbb{R}$ называется *функцией многих переменных*, которую в дальнейшем ради простоты записи мы будем называть просто *функцией*. Множество X называется *областью определения* функции f и обозначается символом $\operatorname{dom} f$, а множество

$$\operatorname{im} f = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \operatorname{dom} f (y = f(x))\}$$

называется областью значений функции f.

Наряду с известными из одномерного анализа понятиями $\operatorname{dom} f$ и $\operatorname{im} f$ в конечномерном анализе весьма полезным является понятие *множества уровня* $c \in \operatorname{im} f$, т. е. прообраза

$$f^{-1}(c) = \{x \in \operatorname{dom} f : f(x) = c\}$$

точки c. Прояснить смысл этого понятия поможет следующий

Пример 1.1 Рассмотрим функцию двух переменных

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,.$$

Очевидно $\operatorname{dom} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, т. е. круг в $\mathbb{R}^2$ радиуса 1 с центром в точке $(0, 0)$; $\operatorname{im} f = [0, 1]$. Множество уровня $c \in [0, 1]$ — это окружность $x^2 + y^2 = 1 - c^2$, состоящая из точек, "высота" которых на полусфере $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ равна в точности c.

Одной из простейших функций является линейная функция.

Определение 1.1 Отображение $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такое, что
(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \ (l(x+y) = l(x) + l(y))$,
(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ (l(\alpha x) = \alpha l(x))$,
называется *линейной функцией.*

Линейная функция устроена весьма просто, как показывает следующая

Теорема 1.1 *Пусть* $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— линейная функция. Тогда существует единственный вектор* $a \in \mathbb{R}^n$ *такой, что* $l(x) =< a, x > \forall x \in \mathbb{R}^n$.

$\circ$ Обозначим $a^i = l(e_i)$, где $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — некоторый (произвольный, но фиксированный на все время доказательства) базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \ \forall x \in \mathbb{R}^n \,.$$

Поэтому

$$l(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i l(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x^i a^i =< a, x > ,$$

где $a = (a^1, a^2, \ldots, a^n)$.

Далее, покажем единственность вектора a. Пусть существует вектор $b \in \mathbb{R}^n$ такой, что $l(x) =< b, x > \forall x \in \mathbb{R}^n$. Тогда $<$

$a-b, x >= 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, в том числе и $< a-b, a-b >= 0$. Отсюда $a = b$. $\bullet$

Упражнение 1.1 Найти множество уровней произвольной линейной функции, определенной на $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$.

Определение 1.2 Число $y_0 \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции* $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ *в точке* $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in \operatorname{dom} f\, (0 < |x - x_0|_n < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon)\,.$$

Определение 1.3 Число $y_0 \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции* $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ *в точке* $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$, если

$$\forall \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \operatorname{dom} f\, ((x_k \neq x_0 \wedge \lim_{k \to \infty} x_k = x_0) \Rightarrow (\lim_{k \to \infty} f(x_k) = y_0))\,.$$

Как и в одномерном случае определения 1.2 и 1.3 дают понятия *предела по Коши и по Гейне* соответственно.

Упражнение 1.2 Доказать эквивалентность определений 1.2 и 1.3.

Часто предел функции $y = f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ в точке $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$ записывают в виде

$$\lim_{\substack{x^1 \to x_0^1 \\ x^2 \to x_0^2 \\ \ldots \\ x^n \to x_0^n}} f(x) = y_0$$

и называют *кратным пределом.*

Пример 1.2 Покажем, что

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2) = 0\quad.$$

Для этого воспользуемся определением предела функции по Коши. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Тогда $\forall (x, y) \in B_\delta(0, 0)$ (т. е. $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$) имеем $|x^2 + y^2 - 0| < \varepsilon$.

Пример 1.3 Покажем, что функция $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ не имеет предела в точке $(0,0)$. Для этого воспользуемся определением предела функции по Гейне. Выберем две последовательности $\{(\frac{1}{k}, \frac{1}{k})\}$ и $\{(\frac{1}{k}, -\frac{1}{k})\}$. Очевидно, что

$$\lim_{k\to\infty}(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = \lim_{k\to\infty}(\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}) = (0,0)\,,$$

однако

$$\lim_{k\to\infty} f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{2}{k^2}}{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}} = 1\,,\ \text{а}\ \lim_{k\to\infty} f(\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}) = -1\,.$$

Приведенные пределы подтверждают содержательность введенного понятия предела. Это понятие (т. е. понятие кратного предела функции в точке) не следует путать с понятием *повторного предела функции $y = f(x)$ в точке $x_0(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$*:

$$\lim_{x^n\to x_0^n}\ \lim_{x^{n-1}\to x_0^{n-1}} \dots \lim_{x^2\to x_0^2}\ \lim_{x^1\to x_0^1} f(x)\,,$$

где предел функции $y = f(x)$ вычисляется последовательно: сначала при $x^1 \to x_0^1$, потом $x^2 \to x_0^2$ и т.д. в том порядке, в котором указано. К слову сказать, порядок перехода к повторному пределу тоже может быть разным. Чтобы показать различие этих двух понятий, приведем два примера, но прежде докажем утверждение, полезное при нахождении различных пределов. Но прежде заметим, что *проколотой окрестностью* точки x называется множество $\overset{\bullet}{O}_x = O_x \setminus \{x_0\}$, где O_x — окрестность точки $x \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2 *Пусть функции f и φ определены в проколотой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, причем $|f(x)| \le \varphi(x)\ \forall x \in \overset{\bullet}{O}_{x_0}$. Тогда если $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$, то и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.*

$\circ$ Поскольку $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$, то в силу определения по Коши при любом $\varepsilon > 0$ найдется шар $B_\delta(x_0)$ такой, что если $x \in B_\delta(x_0) \cap \overset{\bullet}{O}_{x_0}$, то $|\varphi(x)| < \varepsilon$. По условию $|f(x)| \le \varphi(x)$, поэтому

$$\forall x \in B_\delta(x_0) \cap \overset{\bullet}{O}_{x_0}\ \ (|f(x)| < \varepsilon)\,,$$

т. е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0\,.$$

•

Пример 1.4 Как показано в примере 1.3 функция $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ не имеет кратного предела в точке $(0, 0)$. Однако ее повторные пределы существуют и равны нулю, поскольку

$$\lim_{x \to 0} f(x, y) = \lim_{y \to 0} f(x, y) = 0\,.$$

Пример 1.5 Для функции $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}$, $y \neq 0$ справедливо неравенство $|f(x, y) \leq |x|$. В силу теоремы 1.2 кратный предел этой функции

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} x \sin \tfrac{1}{y} = 0\,,$$

но при $x \neq 0$ не существует предел

$$\lim_{y \to 0} x \sin \frac{1}{y}\,,$$

а потому не существует и соответствующий повторный предел.

2 Предел вектор-функции многих переменных

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — некоторое множество. Отображение $f : X \to \mathbb{R}^m$ называется *вектор-функцией многих переменных.* В дальнейшем ради краткости вектор-функцию многих переменных будем называть просто *вектор-функцией.* Вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ задается формулой

$$y = f(x) = \mathrm{col}(f^1(x), f^2(x), \ldots, f^m(x)) = \begin{pmatrix} f^1(x) \\ f^2(x) \\ \ldots \\ f^m(x) \end{pmatrix}\,,$$

где $f^i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ есть функция n переменных. Каждая функция $y^i = f^i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ называется *компонентой* вектор-функции $y = f(x)$.

В будущем мы покажем, что все свойства вектор-функций существенным образом зависят от ее компонент. А сейчас заметим, что $\operatorname{dom} f = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{dom} f^i$, и перейдем к рассмотрению простейших, но очень важных примеров вектор-функций.

Пример 2.1 Простейшим примером вектор-функции является последовательность $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ точек пространства $\mathbb{R}^n$

Пример 2.2 Вектор-функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ одного переменного $t \in [a,b]$ задает множество точек в $\mathbb{R}^n$, которое называется *путем*:

$$\Gamma_f[a,b] \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : x^i = f^i(t),\, t \in [a,b],\, i = 1, \ldots, n\}\,.$$

Путь $\Gamma_f[a,b]$ называется *непрерывным*, если все компоненты $f^i = f^i(t)$ — непрерывные функции (одного переменного).

Пример 2.3 Вектор-функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, задаваемая формулой

$$f(x^1, x^2) = \operatorname{col}(x^1 \cos x^2, x^1 \sin x^2)\,,$$

называется *переходом к полярным координатам.* Отличительным ее свойством является то, что она

прямоугольники	переводит в	круги
$\{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x^1 \le R,$ $0 \le x^2 \le 2\pi\}$		$\{(y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2 :$ $(y^1)^2 + (y^2)^2 \le R^2\}$

Пример 2.4 Вектор-функция $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, задаваемая формулой

$$f(x^1, x^2, x^3) = \operatorname{col}(x^1 \cos x^3 \sin x^2, x^1 \sin x^3 \sin x^2, x^1 \cos x^2)\,,$$

называется *переходом к сферическим координатам.* Ее отличительной особенностью является то, что она переводит

прямоугольники	в	шары
$\{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 :$ $0 \le x^1 \le R,$ $0 \le x^2 \le \pi, 0 \le x^3 \le 2\pi\}$		$\{(y^1, y^2, y^3) \in \mathbb{R}^3 :$ $(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 \le R^2\}$

Пример 2.5 Вектор-функция $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, задаваемая формулой

$$f(x^1,x^2,x^3)=\mathrm{col}(x^1\cos x^2,x^1\sin x^2,x^3)\,,$$

называется *переходом к цилиндрическим координатам.* Отличительной ее характеристикой является перевод

$$\begin{array}{ccc}
\text{прямоугольников} & \text{в} & \text{цилиндры} \\
\{(x^1,x^2,x^3)\in\mathbb{R}^3: & & \{(y^1,y^2,y^3)\in\mathbb{R}^3: \\
0\le x^1\le R, & & (y^1)^2+(y^2)^2\le R^2, \\
0\le x^2\le 2\pi, 0\le x^3\le a\} & & 0\le y^3\le a\}
\end{array}$$

Упражнение 2.1 Рассмотреть образы прямоугольников

$$\{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x^1 \le R\,,\ -\frac{\pi}{2} \le x^2 \le \frac{\pi}{2}\,,\ 0 \le x^3 \le 2\pi\}$$

при отображении f если $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ — вектор-функция, задаваемая формулой

$$f(x^1, x^2, x^3) = \mathrm{col}(x^1 \cos x^3 \cos x^2, x^1 \sin x^3 \cos x^2, x^1 \sin x^2)\,.$$

Одним из важнейших является частный случай — линейная вектор-функция. Вектор-функция $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется *линейной*, если линейны все ее компоненты. Об устройстве линейной вектор-функции говорит следующая

Теорема 2.1 *Пусть $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейная вектор-функция. Тогда существует единственная $m \times n$ матрица A такая, что $l(x) = Ax\ \forall x \in \mathbb{R}^n$*

◦ В силу теоремы 1.1 линейная вектор-функция $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ имеет вид

$$l(x) = \begin{pmatrix} l^1(x) \\ l^2(x) \\ \vdots \\ l^m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < a_1, x > \\ < a_2, x > \\ \vdots \\ < a_m, x > \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m^1 & a_m^2 & \dots & a_m^n \end{pmatrix} = Ax\,.$$

где $A = \|a_j^i\|$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ — матрица, единственность которой имеет место в силу единственность векторов $a_1, a_2, \cdots, a_m$. •

А теперь введем понятие предела вектор-функции в точке по Коши и по Гейне.

Определение 2.1 Точка $y_0 \in \mathbb{R}^m$ называется *пределом* вектор-функции $f : X \to \mathbb{R}^n$, $X \subset \mathbb{R}^n$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если либо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \operatorname{dom} f \ (0 < |x - x_0|_n < \delta) \Rightarrow (|f(x) - y_0|_m < \varepsilon),$$

либо

$$\forall \{x_k\} \subset \operatorname{dom} f \setminus \{x_0\} \ (\lim_{k\to\infty} x_k = x_0) \Rightarrow (\lim_{k\to\infty} f(x_k) = y_0)\,.$$

Теорема 2.2 *Вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \in \mathbb{R}^n$ имеет в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ предел $x_0 \in \mathbb{R}^m$ точно тогда, когда ее компоненты $f^i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ имеют в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ пределы y_0^i, $i = 1, 2, \ldots, m$, т. е.*

$$y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x) = \operatorname{col}(\lim_{x\to x_0} f^1(x), \lim_{x\to x_0} f^2(x), \ldots, \lim_{x\to x_0} f^m(x))\,.$$

∘ Доказательство вытекает из очевидного неравенства

$$|f^i(x) - y_0^i| \le |f(x) - y_0|_m \le \sqrt{m} \max_{1\le j\le m} |f^j(x) - y_0^j|\,,$$

верного при любом $i = 1, 2, \ldots, m$. •

Упражнение 2.2 Доказать эквивалентность определений по Коши и по Гейне предела вектор-функции в точке.

3 Локальные свойства непрерывных функций и вектор-функций

Выше мы определили сначала функцию $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ многихпеременных, а потом посредством функции определили вектор-функцию $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$. Сейчас же мы заметим, что функция $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ является частным случаем вектор-функции при $m = 1$. Поэтому мы будем изучать в основном локальные свойства непрерывных вектор-функций, делая оговорки о функциях по мере необходимости

Определение 3.1 Вектор-функция$f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *непрерывной в точке* $x_0 \in X$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

Вектор функция $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *непрерывной на множестве* $X_0 \subset X$, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Вектор-функция называется *непрерывной*, если она непрерывна в области определения.

Локальными свойствами непрерывных вектор-функций мы будем называть те свойства, которыми обладают вектор-функции, непрерывные в точке. Как и в одномерном случае локальные свойства непрерывных вектор-функций полностью определяются свойствами предела. Поэтому сначала сформулируем и докажем необходимые в дальнейшем свойства предела.

Теорема 3.1 *Если вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ имеет предел в точке $x_0 \in \mathbb{R}^m$, то этот предел единственнен.*

Упражнение 3.1 Доказать теорему 3.1.

Замечание 3.1 Теорема 3.1 устанавливает корректность определения 3.1.

Определение 3.2 Вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченной на множестве* X, если

$$\forall a \in \mathbb{R}^m \;\; \exists c \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in X \;\; (|f(x) - a|_m < c)\,.$$

Другими словами, у ограниченной на множестве X вектор-функции f все ее значения должны лежать в некотором шаре $B_c(a)$.

Теорема 3.2 *Пусть вектор-функция f имеет предел в точке x_0. Тогда f ограничена на множестве* $\operatorname{dom} f \cap O_{x_0}$.

Упражнение 3.2 Доказать теорему 3.2.

Определение 3.3 Пусть

$$f(x) = \mathrm{col}(f^1(x), f^2(x), \ldots, f^m(x))\,,$$

$$g(x) = \mathrm{col}(g^1(x), g^2(x), \ldots, g^m(x))$$

— две вектор-функции, имеющие общую область определения $X \subset \mathbb{R}^n$. Их суммой называется вектор-функция

$$(f+g)(x) = \mathrm{col}(f^1(x) + g^1(x), f^2(x) + g^2(x), \ldots$$

$$\ldots, f^m(x) + g^m(x)) \;\; \forall x \in X\,.$$

Произведением вектор-функции $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ на число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется вектор-функция

$$(\alpha f)(x) = \mathrm{col}(\alpha f^1(x), \alpha f^2(x), \ldots, \alpha f^m(x)) \;\; \forall x \in X\,.$$

Теорема 3.3 *Пусть вектор-функции $f, g : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ имеют предел в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда вектор-функции $f + g$, $\alpha f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ тоже имеют предел в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, причем*

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)\,, \quad \lim_{x\to x_0} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x\to x_0} f(x)\,.$$

Упражнение 3.3 Доказать теорему 3.3.

Для вектор-функций $f, g : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$, вообще говоря, невозможно определить их произведение $f \cdot g$ или частное $\dfrac{f}{g}$ (почему?). Однако для функций $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ такие понятия вполне определяемы.

Определение 3.4 Пусть $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ — две функции. Их *произведением* (*частным*) называется функция

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \left(\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\right)\,.$$

(Частное двух функций определяется при естественном требовании $g(x) \neq 0$ при всех $x \in X$).

Теорема 3.4 *Пусть функции* $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ *имеют предел в точке* $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Тогда функции* $f \cdot g$ *и* $\dfrac{f}{g}$ *тоже имеют предел в точке* x_0 *(вторая при условии, что* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$*), причем*

$$\lim_{x\to x_0} f\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

и

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}\,.$$

Упражнение 3.4 Доказать теорему 3.4.

Определение 3.5 Пусть $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ и $g : Y \to \mathbb{R}^l$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, причем $\operatorname{im} f \subset Y$ — две вектор-функции. Тогда их *композицией* называется вектор-функция

$$(g\circ f)(x) = \operatorname{col}(g^1(f^1(x),\ldots,f^m(x)),\ldots,g^l(f^1(x),\ldots,f^m(x))\,,$$

$$g\circ f : X \to \mathbb{R}^l\,,\ \ X \subset \mathbb{R}^n\,.$$

Теорема 3.5 *Пусть вектор-функция* $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ *имеет предел в точке* $x_0 \in X$, *а* $g : Y \to \mathbb{R}^l$, $\operatorname{im} f \subset Y \subset \mathbb{R}^m$ *непрерывна в точке*

$$y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x)\,.$$

Тогда композиция $g\circ f : X \to \mathbb{R}^l$ *имеет предел в точке* x_0, *причем*

$$\lim_{x\to x_0} (f\circ g)(x) = \lim_{y\to y_0} g(y)\,.$$

$\circ$ По условию существует предел $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = z_0$. В силу определения предела по Коши

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall y\in Y\ (0<|y-y_0|_m<\delta)\Rightarrow(|g(y)-z_0|_l<\varepsilon)\,. \tag{3.1}$$

По условию существует также предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$. В силу определения предела по Коши для фиксированного $\delta > 0$ имеем

$$\exists\sigma > 0 \ \forall x \in X \ \ (0 < |x - x_0|_n < \sigma) \Rightarrow (|f(x) - y_0|_m < \delta)\,. \quad (3.2)$$

Положив $y = f(x)$, что возможно по условию, и комбинируя высказывания (3.1) и (3.2) в одно высказывание, получим

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\sigma > 0 \ \forall x \in X \ \ (0 < |x - x_0| < \sigma) \Rightarrow (|(g\circ f)(x) - z_0|_l < \varepsilon)\,,$$

что эквивалентно утверждению теоремы. •

Теорема 3.6 *(i) Непрерывная в точке $x_0 \in X$ вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ ограничена на множестве $O_{x_0} \cap X$.*

(ii) Сумма непрерывных в точке $x_0 \in X$ вектор-функций $f, g : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ непрерывна в этой точке.

(iii) Произведение непрерывной в точке $x_0 \in X$ вектор-функции $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ на число $\alpha \in \mathbb{R}$ непрерывно в этой точке.

(iv) Произведение $f \cdot g$ и частное $\dfrac{f}{g}$ двух непрерывных в точке $x_0 \in X$ функций $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ непрерывны в этой точке (частное при естественном условии $g(x_0) \neq 0$).

(v) Пусть вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, а вектор-функция $g : Y \to \mathbb{R}^l$, $\operatorname{im} f \subset Y \subset \mathbb{R}^m$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда их композиция $g \circ f : X \to \mathbb{R}^l$ непрерывна в точке x_0.

∘ Доказательство теоремы проводится простыми ссылками на определение 3.1 и теоремы 3.2 - 3.5. •

Упражнение 3.5 Доказать, что вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ непрерывна в точке $x_0 \in X$ точно тогда, когда в точке x_0 непрерывны все ее компоненты $f^i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Упражнение 3.6 Доказать, что вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ ограничена на множестве X точно тогда, когда на этом множестве ограничены все ее компоненты $f^i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Определение 3.6 Функцию $f(x) = f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ будем называть *элементарной функцией*, если она получена из переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n$ и констант при помощи конечного числа арифметических операций и операций композиции элементарных функций одного переменного. Вектор-функцию $f(x) = \operatorname{col}(f^1(x), f^2(x), \ldots, f^m(x))$ будем называть *элементарной вектор-функцией*, если все ее компоненты $f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ — элементарные функции.

Теорема 3.7 *Элементарные вектор-функции многих переменных непрерывны.*

Упражнение 3.7 Доказать теорему 3.7.

4 Глобальные свойства функций и вектор-функций

Напомним, что *глобальными* мы называем те свойства, которыми обладает вектор-функция, непрерывная на множестве. Как и в предыдущем параграфе мы будем в основном заниматься глобальными свойствами непрерывных вектор-функций, делая оговорки насчет непрерывных функций по мере необходимости.

Теорема 4.1 *Непрерывная на компакте $X \subset \mathbb{R}^n$ вектор-функция $f :\to \mathbb{R}^m$ ограничена на нем.*

$\circ$ Пусть точка $x \in X$. В силу локальных свойств непрерывных вектор-функций существует окрестность O_x такая, что на множестве $O_x \cap X$ вектор-функция f ограничена. В силу компактности множества X можно выбрать конечное число окрестностей $\{O_{x_i} : i = 1, 2, \ldots, k\}$, покрывающих множество X, причем на множестве $O_{x_i} \cap X$ $i = 1, 2, \ldots, k$ вектор-функция f ограничена. Другими словами, образ $f[O_{x_i} \cap X] \subset B_{r_i}(y_i)$ $i = 1, 2, \ldots, n$. Конечное объединение ограниченных множеств ограничено. Отсюда следует утверждение теоремы. $\bullet$

Следствие 4.1 *Пусть $f : X \to \mathbb{R}^m$ — непрерывная на компакте $X \subset \mathbb{R}^n$ вектор-функция. Тогда множество $f[X] \subset \mathbb{R}^m$ — тоже компакт.*

∘ В силу теоремы 4.1 множество $f[X]$ ограничено. Установим его замкнутость. Пусть $y_0 \in \mathbb{R}^m$ — предельная точка множества $f[X]$, т. е. существует последовательность $\{y_k\} \subset f[X]$, сходящаяся к точке y_0. Рассмотрим последовательность $\{x_k\} \subset X$ такую, что $f(x_k) = y_k$. В силу компактности множества X можно выбрать подпоследовательность $\{x_{k_l}\} \subset \{x_k\}$, сходящуюся к точке $x_0 \in X$. Поскольку вектор-функция f непрерывна, то

$$\lim_{k_l \to \infty} f(x_{k_l}) = f(x_0)\,.$$

С другой стороны, $f(x_{k_l}) = y_{k_l}$, причем

$$\lim_{k_l \to \infty} y_{k_l} = y_0\,.$$

Отсюда, $y_0 = f(x_0) \in X$. •

Это утверждение несколько вольно можно перефразировать так: "непрерывный образ компакта — компакт".

Следствие 4.2 *Непрерывная на компакте* $X \subset \mathbb{R}^n$ *функция* $f : X \to \mathbb{R}$ *принимает на нем наибольшее и наименьшее значение.*

∘ По теореме 4.1 функция $f : X \to \mathbb{R}$ ограничена на множестве X, т. е. множество значений $f[X] \subset \mathbb{R}$ ограничено. Следовательно, существует точная верхняя грань $s = \sup\limits_{x \in X} f(x)$. Предположим, что не существует точки $x_0 \in X$ такой, что $s = f(x_0)$. Тогда в силу локальных свойств функция $\varphi(x) = (s - f(x))^{-1}$ непрерывна на множестве X. Отсюда в силу теоремы 4.1 функция φ ограничена на множестве X. Однако в силу определения точной верхней грани

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x \in X \;\; (s - f(x) < \varepsilon)\,,$$

т. е. $\varphi(x) > \varepsilon^{-1}$. Противоречие.

Существование точки $x \in X$, в которой функция f принимает наименьшее значение, доказывается аналогично. •

Теорему 4.1 и следствия 4.1 и 4.2 можно считать обобщением одномерной теоремы Вейерштрасса о максимальном значении непрерывной функции.

Определение 4.1 Вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$ называется *равномерно непрерывной на множестве* $X \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in X\ \ (|x_1 - x_2|_n < \delta) \Rightarrow (|f(x_1) - f(x_2)|_m < \varepsilon).$$

Упражнение 4.1 Доказать, что вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$ равномерно непрерывная на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ точно тогда, когда все ее компоненты $f^i : X \to \mathbb{R}$ $i = 1, 2, \ldots, m$ равномерно непрерывны на X.

Теперь мы сформулируем и докажем обобщение теоремы Кантора о равномерной непрерывности непрерывной функции.

Теорема 4.2 *Непрерывная на компакте* $X \subset \mathbb{R}^n$ *вектор-функция* $f : X \to \mathbb{R}^m$ *равномерно непрерывна на нем.*

$\circ$ Пусть вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на множестве X, но не равномерно непрерывна. Это означает

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \ \exists x_k, x'_k \in X\ \ (|x_k - x'_k| < \frac{1}{k}) \wedge (|f(x_k) - f(x'_k)| \geq \varepsilon)\,.$$

Так как множество X компактно, то из последовательности $\{x_k\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{x_{k_l}\}$, сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in X$. Кроме того,

$$0 \leq |x'_{k_l} - x_0|_n \leq |x'_{kl} - x_{k_l}|_n + |x_{k_l} - x_0|_n < \frac{1}{k_l} + |x_{k_l} - x_0| \to 0\,,$$

при $k_l \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{k_l \to \infty} x'_{k_l} = x_0$. В силу непрерывности вектор-функции f имеем

$$\lim_{k_l \to \infty} f(x_{k_l}) = \lim_{k_l \to \infty} f(x'_{k_l}) = f(x_0)\,.$$

Однако по предположению имеем

$$|f(x_{k_l}) - f(x'_{k_l})|_m \geq \varepsilon\,.$$

Отсюда после перехода к пределу получаем

$$|f(x_0) - f(x_0)|_m \geq \varepsilon > 0\,.$$

Противоречие. $\bullet$

Определение 4.2 Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *связным*, если для любых точек $x_1, x_2 \in X$ существует непрерывный путь $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$, целиком лежащий в X, т. е. $\gamma : [a, b] \to X$, и такой, что $\gamma(a) = x_1$, а $\gamma(b) = x_2$. Открытое связное множество X будем называть *областью.*

Теорема 4.3 *Пусть вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на связном множестве $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда множество $f[X] \subset \mathbb{R}^m$ тоже связно.*

$\circ$ Выберем две точки $y_1, y_2 \in f[X]$ и рассмотрим точки $x_1, x_2 \in X$ такие, что $f(x_i) = y_i$, $i = 1, 2$. Поскольку X связно, то существует непрерывный путь $\gamma : [a, b] \to X$, такой, что $\gamma(a) = x_1$, а $\gamma(b) = x_2$. Рассмотрим вектор-функцию $\Gamma(t) = f \circ \gamma(t)$. $\Gamma : [a, b] \to f[X]$, причем Γ непрерывна как композиция непрерывных функций и $\Gamma(a) = f(\gamma(a)) = f(x_1) = y_1$, а $\Gamma(b) = f(\gamma(b)) = f(x_2) = y_2$, т. е. $\Gamma : [a, b] \to f[X]$ — непрерывный путь. Ввиду произвола в выборе точек y_1, y_2 множество $f[X]$ связно. $\bullet$

Перефразируя, теорему 4.3 можно выразить так: "непрерывный образ связного множества связен".

Следствие 4.3 *Непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$, определенная на связном множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ и принимающая в точках $x_1, x_2 \in X$ значения $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, принимает на множестве X все значения из отрезка с концами y_1 и y_2.*

$\circ$ В силу связности X существует непрерывный путь $\gamma[a, b] \to X$ такой, что $\gamma(a) = x_1$, а $\gamma(b) = x_2$. Функция $g = f \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна, и связное множество $[a, b]$ отображает в связное множество — отрезок с концами y_1 и y_2. Поскольку путь γ лежит в X, все доказано. $\bullet$

Нетрудно заметить, что следствие 4.3 является обобщением одномерной теоремы Больцано-Коши о промежуточном значении непрерывной функции.

3 ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ И ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

— Так для чего же тебе потребовалось
его освобождать, если он уже
свободный?
— Только женщина может задать
такой вопрос! А как же приключения — то?
Марк Твен. "Приключения Гекльберри Финна"

1 Необходимые условия дифференцируемости функций и вектор-функций в точке

Введение линейной структуры на множестве $\mathbb{R}^n$ (что эквивалентно заданию прямоугольных координат) позволяет многие физические понятия, такие как потенциал, давление, температура, плотность — трактовать как функции многих переменных; а такие понятия как скорость, напряжение электрического поля, импульс — трактовать как вектор-функции многих переменных, причем в качестве этих переменных берутся координаты точек пространства $\mathbb{R}^3$. Как хорошо известно, в одномерном случае многие векторные величины являются производными скалярных величин (например, напряженность электрического поля есть производная потенциала этого поля). Осмыслению понятия "производная" в приложении к функциям и вектор-функциям многих переменных посвящен этот раздел.

Определение 1.1 Пусть вектор $h \in \mathbb{R}^m$. Вектор-функция $\alpha : X \to \mathbb{R}^n$ называется *беконечно малой* в точке x области $X \subset \mathbb{R}^m$, если $\alpha(x+h) \to \mathbb{O}$ при $\|h\| \to 0$. Будем писать $\alpha(x+h) = o(x+h)$, если $\alpha(x+h) = \beta(x+h)\|h\|$, причем β — бесконечно малая в точке x.

Укажем на очевидное утверждение: $(h \to \mathbb{O} \Leftrightarrow (\|h\| \to 0)$.

Определение 1.2 Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ — область. Вектор-функцию $f : X \to \mathbb{R}^n$ назовем *дифференцируемой в точке* $x \in X$, если существует линейная вектор-функция $f'_x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ такая, что

$$f(x+h) - f(x) = f'_x(h) + o(x+h) \ \ \forall h \in \mathbb{R}^m \ \ (x+h \in X)\,.$$

Отображение $x \to f'_x$, ставящее в соответствие $\forall x \in X$ линейную вектор-функцию $f'_x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, называется *производной вектор-функции* $f : X \to \mathbb{R}^n$.

Заметим сразу, что в силу определения 1.3 вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^n$, $X \subset \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке $x \in X$ точно тогда, когда в этой точке дифференцируемы все ее компоненты.

В одномерном случае $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ линейной функцией $f'_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ будет число, равное значению производной дифференцируемой в точке $x \in (a, b)$ функции f, поэтому $f'_x(h) = f'_x h$ $\forall h \in \mathbb{R}$. Для ответа на вопрос, чем является производная функции многих переменных, нам потребуется понятие частной производной.

Определение 1.3 Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — область, а $f : X \to \mathbb{R}$ — функция. Предел

$$\lim_{h^i \to 0} \frac{f(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^i + h^i, x^{i+1}, \ldots, x^n) - f(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^n)}{h^i},$$

если он существует, называется *частной производной* функции f в точке $x \in X$ и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$.

Теорема 1.1 *Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x области $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда в этой точке функция f имеет частные производные по всем переменным, причем*

$$f'_x(h) = \frac{\partial f}{\partial x^1} h^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} h^2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n} h^n$$

для любого вектора $h = (h^1, h^2, \ldots, h^n)$.

$\circ$ Пусть $x \in X$. Выберем вектор $h = (0, \ldots, 0, h^i, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ так, чтобы $x + h \in X$. Предположим, что вектор $a \in \mathbb{R}^m$, задающий линейную функцию $f'_x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, имеет координаты $a = (a^1, a^2, \ldots, a^n)$. Тогда

$$f'_x h = < a, h > = a^i h^i \,.$$

Ввиду дифференцируемости функции f в точке x имеем

$$f(x+h)-f(x)=f(x^1,x^2,\ldots,x^{i-1},x^i+h^i,x^{i+1},\ldots,x^n)-$$
$$-f(x^1,x^2,\ldots,x^i,\ldots,x^n)=$$
$$=a^ih^i+\beta(x+h)|h^i|\,,$$

поскольку $\|h\|=(|h^i|^2)^{\frac{1}{2}}=|h^i|$. Отсюда

$$\lim_{h^i\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h^i}=a^i\,,$$

т. е. $a^i=\dfrac{\partial f}{\partial x^i}(x)$. Ввиду единственности вектора a других возможностей нет. $\bullet$

Установленный теоремой 1.1 вектор a носит название *градиента* функции f в точке x и обозначается

$$\operatorname{grad} f(x):=\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x),\frac{\partial f}{\partial x^2}(x),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x^n}(x)\right)=\nabla f(x)\,.$$

Таким образом, *производной* функции $f:X\to\mathbb{R}$ называется вектор-функция $f'_x:X\to\mathbb{R}^n$, ставящая в соответствии каждой точке $x\in X$ градиент ∇f функции $f:X\to\mathbb{R}$, $X\subset\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2 *Пусть вектор-функция $f:X\to\mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке x области $X\subset\mathbb{R}^n$. Тогда в этой точке все компоненты вектор-функции f имеют частные производные по всем переменным, причем*

$$f'_x(h)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f^1}{\partial x^1}h^1+\dfrac{\partial f^1}{\partial x^2}h^2+\ldots+\dfrac{\partial f^1}{\partial x^n}h^n\\ \dfrac{\partial f^2}{\partial x^1}h^1+\dfrac{\partial f^2}{\partial x^2}h^2+\ldots+\dfrac{\partial f^2}{\partial x^n}h^n\\ \cdots\\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1}h^1+\dfrac{\partial f^n}{\partial x^2}h^2+\ldots+\dfrac{\partial f^n}{\partial x^n}h^n\end{pmatrix}\qquad(1.1)$$

для любого вектора $h=(h^1,h^2,\ldots,h^n)$.

∘ Ввиду определения 1.2 и теоремы 1.1 доказательство очевидно. •

Выражение (1.1) записывается в виде $f'_x(h) = J_f(x)h$, где матрица

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}(x) := \left\| \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x) \right\|_{j=1,\dots,m}^{i=1,\dots,n}$$

называется *матрицей Якоби*[11] вектор-функции f в точке $x \in X$. Таким образом, *производной* вектор-функции называется отображение $f'_x : X \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, ставящее каждой точке $x \in X$ в соответствие матрицу Якоби. (Здесь через $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ обозначено множество матриц $n \times m$).

Мы не ставим перед собой цель сколько-нибудь полно исследовать матриц-функции (т. е. отображения, ставящие в соответствие каждой точке матрицу), однако заметим, что матриц-функции (как, впрочем, и более общие тензор-функции) обладают теми же свойствами, которыми обладают их компоненты. В будущем мы к этому еще вернемся, а сейчас загадаем загадку: что будет производной матрицы Якоби?

Вернемся к основной цели нашего повествования — выяснению необходимых условий дифференцируемости вектор-функции в точке. Из теорем 1.1, 1.2 следует, что необходимым условием диифференцируемости является наличие частных производных. В одномерном анализе дифференцируемость функции в точке эквивалента существованию производной в этой точке. В конечномерном анализе из существования частных производных в точке *не следует* дифференцируемость функции в этой точке. Чтобы показать это, проведем небольшое исследование.

Сначала заметим, что

$$\text{дифференцируемость в точке} \;\Rightarrow\; \text{непрерывность в точке}\,. \tag{1.2}$$

[11]Карл Густав Якоб Якоби (1804-1851) — известный немецкий математик ряда работ по математическому анализу.

Действительно, в силу определения 1.2 имеем

$$f(x+h) - f(x) = f'_x(h) + o(x+h)\,.$$

Отсюда получаем

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x) + \lim_{h\to 0}(f'_x(h) + o(x+h)) = f(x)\,.$$

Утверждение (1.2) эквивалентно следующему:

разрывность в точке $\Rightarrow$ недифференцируемость в точке.

Теперь рассмотрим

Пример 1.1 Функция

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ если } xy = 0\,; \\ 1, \text{ если } xy \neq 0\,; \end{cases}$$

равна нулю на осях координат, поэтому ее частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0$$

в точке $(0,0)$, очевидно, существуют. В то же время функция f в точке $(0,0)$ разрывна и, следовательно, недифференцируема.

2 Локальные свойства дифференцируемых функций и вектор-функций

Напомним, что локальными называются те свойства, которыми обладают функции и вектор-функции, дифференцируемые в точке.

Теорема 2.1 *а) Пусть вектор-функции $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ дифференцируемы в точке x области $X \subset \mathbb{R}^m$, тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ вектор-функция $\alpha f + \beta g : X \to \mathbb{R}^n$ также дифференцируема в точке x, причем*

$$(\alpha f + \beta g)'_k = \alpha f'_x + \beta g'_x\,.$$

б) Пусть вектор-функции $f, g : X \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке x области $X \subset \mathbb{R}^m$, тогда $f \circ g : X \to \mathbb{R}$ и $\dfrac{f}{g} : X \to \mathbb{R}$ также дифференцируемы в точке x, причем

$$(f \circ g)'_x = g \cdot f'_x + f \cdot g'_x\,;$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'_x = \frac{g \cdot f'_x - f \cdot g'_x}{g^2}\,.$$

○ Доказательство этой теоремы аналогично одномерному случаю и потому опускается. ●

Теорема 2.2 *Пусть вектор-функция $f, g : X \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемы в точке x области $X \subset \mathbb{R}^l$, а вектор-функция $g : Y \to \mathbb{R}^n$ дифференцируема в точке $y = f(x)$ области $Y \subset \mathbb{R}^m$, причем $Y \supset f[X]$. Тогда их коипозиция $g \circ f : X \to \mathbb{R}^n$ дифференцируемость в точке $x \in X$, причем*

$$(g \circ f)'_x = g'_y \cdot f'_x\,,\ \ y = f(x)\,.$$

○ Пусть $h \in \mathbb{R}^l$ такой вектор, что $x + h \in X$. Тогда

$$(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x) = g(f(x+h)) - g(f(x)) =$$

$$= g'_{f(x)}(f(x+h) - f(x)) + o(f(x+h)) =$$

$$g'_{f(x)}(f'_x(h) + o(x+h)) + o(f(x+h)) =$$

$$= g'_{f(x)}(f'_x(h)) + g'_{f(x)}o(x+h) + o(f(x+h)) =$$

$$= (g'_y \circ f'_x)(h) + o(x+h)\,,$$

где $y = f(x)$, $g'_y \circ f'_x : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$ — линейная вектор-функция (как композиция линейных вектор-функций) и, кроме того

$$g'_y o(x+h) \to \mathbb{O} \text{ при } \|h\| \to 0\,;$$

$$o(f(x+h)) \to \mathbb{O} \text{ при } \|h\| \to 0\,. \bullet$$

В координатной форме содержание теоремы заключается в том, что если $x \in X$ и

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^l}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial f^m}{\partial x^1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f^m}{\partial x^l(x)} \end{pmatrix} = \left\| \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x) \right\|_{j=1,\dots,l}^{i=1,\dots,m},$$

а $y = f(x) \in Y$ и

$$J_g(y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g^1}{\partial y^1}(y) & \dots & \dfrac{\partial g^1}{\partial y^m}(y) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial g^n}{\partial y^1}(y) & \dots & \dfrac{\partial g^n}{\partial y^m}(y) \end{pmatrix} = \left\| \frac{\partial g^k}{\partial y^j}(y) \right\|_{j=1,\dots,m}^{k=1,\dots,n},$$

то матрица Якоби в точке $x \in X$ композиции $g \circ f$ равна

$$J_{g\circ f}(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g^1}{\partial y^1} & \dots & \dfrac{\partial g^1}{\partial y^m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial g^n}{\partial y^1} & \dots & \dfrac{\partial g^n}{\partial y^m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^1}{\partial x^l} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial y^m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^m}{\partial x^l} \end{pmatrix}, \qquad (2.3)$$

где $y^i = f^i(x)$, $i = 1, \dots, m$.

Полученная формула (2.3) будет основой при рассмотрении всех важных частных случаев.

Следствие 2.1 *Пусть вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^n$ дифференцируема в точке x области $X \subset \mathbb{R}^m$, а функция $g : Y \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $y = f(x)$ области $Y \subset \mathbb{R}^n$ такой, что $Y \supset f[X]$. Тогда их композиция $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x \in \mathbb{R}^l$, причем*

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x^i} = \frac{\partial g}{\partial y^1}\frac{\partial y^1}{\partial x^i} + \frac{\partial g}{\partial y^2}\frac{\partial y^2}{\partial x^i} + \dots + \frac{\partial g}{\partial y^n}\frac{\partial y^n}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, m,$$

где $y^i = f^i(x)$, $i = 1, \dots, n$.

∘ Действительно, в силу (2.3) имеем

$$J_{g\circ f}(x) = \nabla g(y) J_f(x) = \left(\frac{\partial g}{\partial y^1}, \frac{\partial g}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial y^n}\right) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}.$$

С другой стороны,

$$J_{g\circ f}(x) = \nabla f \circ g(x) = \left(\frac{\partial (g\circ f)}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial (g\circ f)}{\partial x^m}\right).$$

Сравнивая, получаем

$$\frac{\partial (g\circ f)}{\partial x^i} = \left\langle \nabla g(y), \mathrm{col}\left(\frac{\partial f^1}{\partial x^i}, \frac{\partial f^2}{\partial x^i}, \dots, \frac{\partial f^n}{\partial x^i}\right)\right\rangle =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial y^1}\frac{\partial y^1}{\partial x^i} + \frac{\partial g}{\partial y^2}\frac{\partial y^2}{\partial x^i} + \dots + \frac{\partial g}{\partial y^n}\frac{\partial y^n}{\partial x^i},$$

где $i = 1, \dots, n$ •

Следствие 2.2 *Пусть вектор-функция $f : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ дифференцируема в точке $t \in (a,b)$, а функция $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x = f(t)$ области $X \subset \mathbb{R}^n$ такой, что $X \supset f(a,b)$. Тогда их композиция $g\circ f : (a,b) \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке t, причем*

$$g\circ f'_t = \frac{\partial g}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial t} + \dots + \frac{\partial g}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial t}.$$

∘ Доказательство, очевидно, стоит в предыдущем доказательстве положить $m = 1$ и сделать некоторые переобозначения. •

3 Достаточные условия дифференцируемости функций и вектор-функций

Лемма 3.1 *Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ определена в области $X \subset \mathbb{R}^n$, и пусть отрезок $[x, x+h]$ с концами x и $x+h$ содержится в X. Если f непрерывна в точках отрезка $[x, x+h]$ и* *дифференцируема в точках интервала* $(x, x+h)$*, то найдется точка* $\xi \in (x, x+h)$ *такая, что*

$$f(x+h) - f(x) = f'_\xi(h)\,. \tag{3.4}$$

○ Рассмотрим вектор-функцию $g : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, имеющую вид $g(t) = ht + x$. Она, очевидно, непрерывна для любого $t \in [0,1]$ и дифференцируема для любого $t \in (0,1)$. Построим композицию $f \circ g : [0,1] \to \mathbb{R}$. Композиция $f \circ g$ тоже непрерывна $\forall t \in [0,1]$ и дифференцируема $\forall t \in (0,1)$, поскольку для любого $t \in [0,1]$ точка $ht + x \in [x, x+h]$. В силу теоремы Лагранжа имеем

$$f \circ g(1) - f \circ g(0) = (f \circ g)'_\tau\,,$$

где $\tau \in (0,1)$. В силу теоремы 2.2 имеем

$$(f \circ g)'_\tau = f'_\xi \cdot g'_\tau = f'_\xi(h)\,,$$

где $\xi = h\tau + x \in (x, x+h)$. Окончательно получаем

$$f \circ g(1) - f \circ g(0) = f(x+h) - f(x) = f'_\xi(h)\,.\bullet$$

Распишем соотношение (3.4) в декартовых координатах:

$$f(x+h) - f(x) = f(x^1+h^1, x^2+h^2, \ldots, x^n+h^n) - f(x^1, x^2, \ldots, x^n) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi)h^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}(\xi)h^2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(\xi)h^n =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1 + \tau h^1, x^2 + \tau h^2, \ldots, x^n + \tau h^n)h^1 +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1 + \tau h^1, x^2 + \tau h^2, \ldots, x^n + \tau h^n)h^2 + \ldots +$$

$$\ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x^1 + \tau h^1, x^2 + \tau h^2, \ldots, x^n + \tau h^n)h^n\,.$$

Теорема 3.1 *Пусть функция* $f : X \to \mathbb{R}$ *имеет в некоторой окрестности точки* x *области* $X \subset \mathbb{R}^n$ *частные производные по всем переменным, которые непрерывны в точке* x*. Тогда* f *дифференцируема в точке* $x \in X$*.*

∘ Без ограничения общности считаем окрестность точки x шаром $B_r(x)$. Тогда вместе с точками $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и $x + h = (x^1 + h^1, x^2 + h^2, \ldots, x^n + h^n)$ шару $B_r(x)$ принадлежат также точки $(x^1, x^2 + h^2, \ldots, x^n + h^n)$, …, $(x^1, x^2, \ldots, x^n + h^n)$ и соединяющие их отрезки. Воспользуемся этим, применяя лемму 3.1:

$$f(x+h)-f(x) = f(x^1+h^1, x^2+h^2, \ldots, x^n+h^n)-f(x^1, x^2, \ldots, x^n) =$$

$$= f(x^1 + h^1, x^2 + h^2, \ldots, x^n + h^n) - f(x^1, x^2 + h^2, \ldots, x^n + h^n) +$$
$$+ f(x^1, x^2 + h^2, \ldots, x^n + h^n) - f(x^1, x^2, \ldots, x^n + h^n) + \ldots +$$
$$+ f(x^1, x^2, \ldots, x^n + h^n) - f(x^1, x^2, \ldots, x^n) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1 + \tau h^1, x^2 + h^2, \ldots, x^n + h^n)h^1 +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1, x^2 + \tau h^2, \ldots, x^n + h^n)h^1 + \ldots +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x^n}(x^1, x^2, \ldots, x^n + \tau h^n)h^n\,.$$

Пока что мы воспользовались лишь существованием частных производных, а теперь воспользуемся их непрерывностью и запишем предыдущую выкладку в виде

$$f(x+h)-f(x) = \frac{\partial f}{\partial x^1}h^1+\alpha_1 h^1+\frac{\partial f}{\partial x^2}h^2+\alpha_2 h^2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x^n}h^n+\alpha_n h^n\,,$$

где частные производные посчитаны в точке $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — бесконечно малые при $h \to 0$. Но это означает, что

$$f(x + h) - f(x) = f'_x(h) + o(h)\,,$$

где

$$f'_x(h) = \frac{\partial f}{\partial x^1}h^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}h^2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}h^n\,. \bullet$$

Итак, теорема 3.1 приводит достаточные условия дифференцируемости функции $f : X \to \mathbb{R}$, определенной в области $X \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 3.2 *Пусть для каждой компоненты вектор-функции $f : X \to \mathbb{R}^n$ в окрестности точки x области $X \subset \mathbb{R}^n$ выполнены условия теоремы 3.1. Тогда f дифференцируема в точке x.*

∘ В силу определения 1.2 вектор-функция дифференцируема точно тогда, когда дифференцируема каждая ее компонента, поэтому доказательство теоремы излишне. •

Определение 3.1 Вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^n$ называется *дифференцируемой в области* $X \subset \mathbb{R}^m$, если f дифференцируема в каждой точке $x \in X$. Дифференцируемая вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^n$ называется *непрерывно дифференцируемой* в области $X \subset \mathbb{R}^m$, если частные производные всех ее компонент — непрерывные в области X функции. Множество всех непрерывно дифференцируемых в области $X \subset \mathbb{R}^m$ вектор-функций $f : X \to \mathbb{R}^n$ будем обозначать символом $C^1(X, \mathbb{R}^n)$.

Теорема 3.3 *Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ – область и $f : X \to \mathbb{R}^n$ – элементарная вектор-функция. Тогда $f \in C^1(X, \mathbb{R}^n)$.*

∘ В силу определения ?? и таблицы производных частные производные по всем переменным всех компонент вектор-функции f — элементарные функции. В силу теоремы 3.2 эти частные производные непрерывны. •

4 Высшие производные и дифференциалы

Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ в каждой точке x области $X \subset \mathbb{R}^n$, то эта частная производная является функцией $\dfrac{\partial f}{\partial x^i} : X \to \mathbb{R}$, которая тоже может иметь частную производную в точке $x \in X$, именно $\dfrac{\partial}{\partial x^j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$, которая называется *частной производной второго порядка* (или просто *второй частной производной*) функции f. Возникает вопрос о влиянии порядка дифференцирований на вычисляемую вторую производную.

Теорема 4.1 *Пусть функция* $f : X \to \mathbb{R}$ *имеет в некоторой окрестности точки* x *области* $X \subset \mathbb{R}^n$ *частные производные*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i},$$

которые непрерывны в точке x*. Тогда эти частные производные совпадают в точке* x*.*

∘ Не теряя общности, заменим окрестность точки x шаром $B_r(x) \subset X$, а функцию $f(x) = f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ — функцией только двух переменных, $f(x) = f(x^i, x^j)$. Нам предстоит проверить, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x),$$

если в точке $x = (x^i, x^j)$ обе частные производные непрерывны.

Выберем вектор $h = (h^i, h^j)$ такой, что $x + h \in B_r(x)$. Тогда и точки $(x^i + h^i, x^j)$, $(x^i, x^j + h^j)$ тоже лежат в $B_r(x)$. Введем вспомогательную функцию

$$F(h^i, h^j) = f(x^i+h^i, x^j+h^j) - f(x^i+h^i, x^j) - f(x^i, x^j+h^j) + f(x^i, x^j).$$

Если $F(h^i, h^j)$ рассматривать как разность

$$F(h^i, h^j) = \psi(1) - \psi(0),$$

где $\psi(t) := \dfrac{\partial f}{\partial x^i}(x^i + \tau h^i, x^j + t h^j)$, применим теорему Лагранжа еще раз и получим

$$F(h^i, h^j) = \psi'(\xi) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x^i + \tau h^i, x^j + \xi h^j) h^i h^j . \qquad (4.5)$$

Теперь представим $F(h^i, h^j)$ в виде разности

$$F(h^i, h^j) = \tilde{\varphi}(1) - \tilde{\varphi}(0),$$

где $\tilde{\varphi}(t) =: f(x^i + h^i, x^j + t h^j) - f(x^i, x^j + t h^j)$. Применив теорему Лагранжа, получим

$$F(h^i, h^j) = \tilde{\varphi}'(\hat{\tau}) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(x^i + h^i, x^j + \hat{\tau} h^j) h^j - \frac{\partial f}{\partial x^i}(x^i, x^j + \hat{\tau} h^j) h^j .$$

Представив еще раз $F(h^i, h^j)$ в виде разности

$$F(h^i, h^j) = \tilde{\psi}(1) - \tilde{\psi}(0)\,,$$

где $\tilde{\psi}(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x^j}(x^i + th^i, x^j + \hat{\tau}h^j)h^j$, получим, что

$$F(h^i, h^j) = \tilde{\psi}'(\hat{\xi}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x^i + \hat{\xi}h^i, x^j + \hat{\tau}h^j)h^i h^j\,. \qquad (4.6)$$

Сравнивая (4.5) и (4.6), получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x^i + \tau h^i, x^j + \xi h^j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x^i + \hat{\xi}h^i, x^j + \hat{\tau}h^j)\,.$$

Воспользовавшись непрерывностью рассматриваемых частных производных в точке (x^i, x^j), при предельном переходе $(h^i, h^j) \to (0, 0)$ получим требуемое. •

Определив вторые частные производные функции f в точке $x \in X$ нетрудно определить третьи, четвертые и т.д.

Определение 4.1 $C^k(X, \mathbb{R}^n)$ — множество вектор-функций $f : X \to \mathbb{R}^n$, компоненты которых имеют все частнае производные до порядка k включительно, непрерывные в области $X \subset \mathbb{R}^m$.

В силу теоремы 4.1 нахождение всех частных производных до порядка k включительно любой компоненты вектор-функции $f : X \to \mathbb{R}^n$, определенной в области $X \subset \mathbb{R}^m$, не зависит от порядка дифференцирования.

Определение 4.2 $C^\infty(X, \mathbb{R}^n)$ — множество вектор-функций $f : X \to \mathbb{R}^n$, компоненты которых имеют все частнае производные любого порядка, непрерывные в области $X \subset \mathbb{R}^m$.

Теорема 4.2 *Пусть $f : X \to \mathbb{R}^n$ — элементарная вектор-функция, определенная в области $X \subset \mathbb{R}^m$. Тогда $f \in C^\infty(X, \mathbb{R}^n)$.*

◦ Теорема доказывается аналогично теореме 3.3. •

Для дальнейшего продвижения вперед нам необходимо понятие тензора.

Определение 4.3 Упорядоченный набор $i_1, i_2, \ldots, i_l$ натуральных чисел назовем *мультииндексом ранга* $l > 0$. Будем говорить, что задан *тензор ранга* l (задана *тензор-функция ранга* l, если каждому мультииндексу $i_1, i_2, \ldots, i_l$ ранга l из конечного множества

$$\{i_1, \ldots, i_l : 1 \le i_1 \le I_1, \ldots, 1 \le i_l \le I_l, I_1, \ldots, I_l \in \mathbb{N}\}$$

поставлено в соответствие число $T^{i_1,i_2,\ldots,i_l} \in \mathbb{R}$ (поставлена в соответствие функция $T^{i_1,i_2,\ldots,i_l} : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$). Число $T^{i_1,i_2,\ldots,i_l}$ (функция $T^{i_1,i_2,\ldots,i_l}$) называется *компонентой тензора* $\|T^{i_1,i_2,\ldots,i_l}\|$ (*тензор-функции* $\|T^{i_1,i_2,\ldots,i_l}(x)\|$).

Таким образом, тензор ранга 1 — это вектор $(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \|x^i\|$, а тензор ранга 2 — матрица порядка $n \times m$:

$$\begin{pmatrix} x^{11} & x^{12} & \ldots & x^{1m} \\ x^{21} & x^{22} & \ldots & x^{2m} \\ . & . & . & . \\ x^{n1} & x^{n2} & \ldots & x^{nm} \end{pmatrix} = \|x^{ij}\| .$$

Примерами тензор-функций ранга 1 и 2 служат вектор-функция и ее матрица Якоби соответственно. Удобно в дальнейшем *тензором ранга* 0 считать любое число, а *тензор-функцией ранга* 0 — любую функцию.

Пусть теперь $f \in C^k(X, \mathbb{R})$, X — область в $\mathbb{R}^n$, $k \ge 1$. Тогда по теореме 3.1 существует производная $f'_x : X \to \mathbb{R}^n$, которая каждому $x \in X$ ставит в соответствие градиент ∇f. Другими словами, производная тензор-функции ранга 0 $f : X \to \mathbb{R}$ есть тензор-функция ранга 1

$$f'_x : X \to \mathbb{R}^n\,, \;\; f'_x : x \to \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right)(x)\,.$$

Если $k \ge 2$, то по теореме 3.2 вектор-функция $f'_x(x) = \nabla f(x)$ имеет производную $(f'_x)'_x : X \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, которая каждому

$x \in X$ ставит в соответствие матрицу Якоби

$$(f'_x)'_x : x \to \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^1} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^n} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^n} \end{pmatrix} (x)\,. \tag{4.7}$$

По аналогии с предыдущем случаем производную $(f'_x)'_x$ вектор-функции $f'_x(x) = \nabla f(x)$ называют второй призводной функции $f : X \to \mathbb{R}$, т. е. $(f'_x)'_x = f''_{xx}$. Кроме тог, матрица (4.7) носит название матрицы Гессе[12] функции f в точке x и обозначается символом $H_f(x)$. Таким образом, все сказанное выше можно записать в виде

$$H_f(x) = J_{\nabla f}(x)\,.$$

На тензорном языке это выглядит так: вторая производная тензор-функции ранга 0 есть тензор функция ранга 2, полученная взятием градиента от каждой компоненты тензор-функции ранга 1, являющейся первой производной тензор-функции ранга 0. Эти соображения приводят нас к следующему определению.

Определение 4.4 Пусть $f \in C^k(X, \mathbb{R})$ — функция, определенная в области $X \subset \mathbb{R}^n$, и пусть определена тензор-функция ранга l

$$\left\| \frac{\partial^l f}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \ldots \partial x^{i_l}} \right\| (x)\,, \;\; 1 \le i_j \le n\,, \;\; 1 \le l \le k\,, \tag{4.8}$$

являющаяся l-той производной функции f. Тогда $l+1$-*ой производной* функции f называется тензор-функция ранга $l+1$, полученная взятием градиента от каждой компоненты тензор-функции (4.8).

Упражнение 4.1 Определить высшие производные вектор-функции $f \in C^k(X, \mathbb{R}^n)$, заданной в области $X \subset \mathbb{R}^m$.

[12] Людвиг Отто Гессе (1811-1874) — немецкий математик. Основные работы относятся к геометрии.

Теперь перейдем к определению дифференциала функции многих переменных.

Определение 4.5 *Сверткой* тензора $\|T^{i_1 i_2 \ldots i_l}\|$ ранга $l \geq 1$ и вектора $h = (h^1, h^2, \ldots, h^{I_j})$ по индексу $1 \leq i_j \leq I_j$ называется тензор ранга $l-1$, компоненты $\tilde{T}^{i_1 i_2 \ldots i_{j-1} i_{j+1} \ldots i_l}$ которого равны

$$\sum_{i_j=1}^{I_j} T^{i_1 i_2 \ldots i_{j-1} i_j i_{j+1} \ldots i_l} h^{i_j} .$$

Таким образом, свертка тензора $g = (g^1, g^2, \ldots, g^m)$ равна 1 и вектора $h = (h^1, h^2, \ldots, h^m)$ есть число (тензор ранга 0)

$$\sum_{i=1}^{m} h^i g^i .$$

Свертка тензора $\|g^{ij}\|$ ранга 2 и вектора $h = (h^j)$ есть вектор (тензор ранга 1) с компонентами

$$\left(\sum_{j=1}^{m} g^{1j} h^j, \sum_{j=1}^{m} g^{2j} h^j, \ldots, \sum_{j=1}^{m} g^{nj} h^j, \right) .$$

Полученный в результате свертки тензор ранга $l-1 \geq 1$ можно опять свернуть с каким-либо вектором и получить в результате тензор ранга $l-2$.

Определение 4.6 *Дифференциалом* $d^l f(x)$ порядка $l \geq 1$ функции $f \in C^k(X, \mathbb{R})$, $k \geq l$ в точке x области $X \subset \mathbb{R}^n$ называется l-кратная свертка l-той производной функции f (тензор-функции ранга l) в точке x с вектором $dx = (dx^1, dx^2, \ldots, dx^n)$, т. е.

$$d^l f(x) \sum_{\substack{i_1=1\\ i_2=1\\ \cdots\\ i_l=1}}^{n} \frac{\partial^l f}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \ldots \partial x^{i_n}}(x) dx^{i_1} dx^{i_2} \ldots dx^{i_l} .$$

Таким образом,

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}dx^2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}dx^n = < \nabla f(x), dx >;$$

$$d^2 f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i dx^j = < H_f(x)dx, dx > \ .$$

Упражнение 4.2 Определить дифференциал любого порядка вектор-функции $f : X \to \mathbb{R}^n$, определенный в области $X \subset \mathbb{R}^m$, и выписать df и $d^2 f$.

5 Формула Тейлора

Определение 5.1 Пусть $h \in \mathbb{R}^n$ — некоторый вектор, $\|h\| = 1$. $f : X \to \mathbb{R}$ — функция, определенная в области $X \subset \mathbb{R}^n$, $x \in X$. Предел $\lim\limits_{t\to 0+} f(x+th)$, если он существует, называется *пределом f в точке x по направлению h*.

Упражнение 5.1 Показать, что из существования предела функции f в точке $x \in X$ следует существование предела по любому направлению.

Обратное неверно, как показывает следующий

Пример 5.1 Найдем предел функции $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ по направлению (α^1, α^2) в точке $(0,0)$;

$$\lim_{t\to 0+} f(0+t\alpha^1, 0+t\alpha^2) = \lim_{t\to 0+} \frac{\alpha^1\alpha^2}{(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2} \,.$$

Итак, функция $f(x,y)$ имеет предел в точке $(0,0)$ по любому направлению (α^1, α^2), однако предела в точке $(0,0)$ эта функция не имеет.

Определение 5.2 Пусть $h \in \mathbb{R}^n$ — некоторый вектор, $\|h\| = 1$, $f : X \to \mathbb{R}^n$ — функция, определенная в области $X \subset \mathbb{R}^n$, $x \in X$. Предел

$$\lim_{t\to 0+} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} \,,$$

если он существует, называется *производной функции f по направлению h в точке x* и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial h}$.

Функция

$$f(x,y)=\begin{cases}1\,, & xy\neq 0\,;\\ 0\,, & xy=0\,,\end{cases}$$

как показано в примере 1.1, имеет производные по направлениям $(1,0)$ и $(0,1)$ в точке $(0,0)$, однако не дифференцируема в этой точке.

Лемма 5.1 *Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке по любому направлению $h \in \mathbb{R}^n$, причем*

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) =< \nabla f(x), h > \ .$$

$\circ$ Пусть $h \in \mathbb{R}^n$ — некоторый вектор единичной длины. Поскольку точка $x \in X$ внутренняя, то $\exists T \in \mathbb{R}_+ \ \forall t \in [-T,T]$ $(x+th \in X)$. Вектор-функция $\varphi : [o,T] \to \mathbb{R}^n$, заданная формулой $\varphi(t) = x + th$ дифференцируема в точке $t = 0$ (очевидно!), причем $\varphi'_t = h$. Из условия теоремы и в силу теоремы 2.2 получаем

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = \lim_{t\to 0+}\frac{f(x+th)-f(x)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t} =< \nabla f(x), h > \ .\bullet$$

Теперь возьмем функцию $f \in C^\infty(X,\mathbb{R})$ и вектор $h \in \mathbb{R}^n$ такой, что $x + h \in X$ для некоторой точки $x \in X$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = f(x+th)\,,\ \ \varphi : [0,1] \to \mathbb{R}\,.$$

Она дифференцируема сколь угодно раз $\forall t \in (0,1)$. Обозначим ее l-тую производную символом $\varphi_t^{(l)}$.

Лемма 5.2

$$\varphi_t^{(l)} = \left(h^1\frac{\partial}{\partial x^1} + h^2\frac{\partial}{\partial x^2} + \ldots + h^n\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^l f(x+th)\,.$$

○ Доказательство проведем методом математической индукции. Пусть $l = 1$, тогда, рассуждая как при доказательстве леммы 5.1, получим

$$f'_t =< \nabla f(x+th), h >= \frac{\partial f}{\partial x^1}(x+th)h^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}(x+th)h^2 + \ldots +$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x^n}(x+th)h^n = \left(h^1\frac{\partial}{\partial x^1} + h^2\frac{\partial}{\partial x^2} + \ldots + h^n\frac{\partial}{\partial x^n}\right) f(x+th)\,.$$

Предположим теперь, что при $l = k$ утверждение леммы справедливо. Тогда

$$\varphi_t^{(k+1)} = (\varphi_t^{(k)})'_t =$$

$$= \left\langle \nabla \left(h^1\frac{\partial}{\partial x^1} + h^2\frac{\partial}{\partial x^2} + \ldots + h^n\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^k f(x+th), h \right\rangle =$$

$$= \left(h^1\frac{\partial}{\partial x^1} + h^2\frac{\partial}{\partial x^2} + \ldots + h^n\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^k \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x+th)h^1 + \ldots +\right.$$

$$\left.+\frac{\partial f}{\partial x^n}(x+th)h^n\right) =$$

$$= \left(h^1\frac{\partial}{\partial x^1} + h^2\frac{\partial}{\partial x^2} + \ldots + h^n\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{k+1} f(x+th)\,.\bullet$$

Замечание 5.1 Пользуясь тензорным языком, вторую производную функции $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ можно записать в видв

$$\varphi''_t = \langle \nabla < \nabla f(x+th), h >, h\rangle =$$

$$= \left\langle (\frac{\partial}{\partial x^1}(\frac{\partial f}{\partial x^1}h^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}h^n), \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}(\frac{\partial f}{\partial x^1}h^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}h^n)), h \right\rangle =$$

$$=< H_f(x+th)h, h > \;.$$

Замечание 5.2 Зафиксируем точки $x_0, x \in \mathbb{R}$ и рассмотрим вектор $dx = (dx^1, dx^2, \ldots, dx^n) = (x^1 - x_0^1, x^2 - x_0^2, \ldots, x^n - x_0^n)$. Положив $dx = h$, из леммы 5.2 получим при $t = 0$

$$\varphi_{t=0}^{(l)} = \left(dx^1\frac{\partial}{\partial x^1} + dx^1\frac{\partial}{\partial x^2} + \ldots + dx^n\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^l f(x) =$$

$$= \sum_{1}^{n} \frac{\partial^l f}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \dots \partial x^{i_l}}(x) dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_l} = d^l f(x) .$$

Теорема 5.1 *Пусть $f \in C^{l+1}(B_r(x), \mathbb{R})$, где шар $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$, вектор $h \in \mathbb{R}^n$ таков, что $x + h \in B_r(x)$. Тогда*

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k!} \left(h^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + h^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right)^k f(x) + R_{l+1}(x,h) ,$$

где

$$R_{l+1}(x,h) = \frac{1}{(l+1)!} \left(h^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + h^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right)^{l+1} f(x + \tau h) ,$$

$0 \le \tau \le 1$, *— остаточный член в форме Лагранжа, либо*

$$R_{l+1}(x,h) = \frac{1}{(l+1)!} \left(h^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + h^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right)^{l+1} f(x) + o(\|h\|^l)$$

— остаточный член в форме Пеано.

∘ Заметим, что $(x + h \in B_r(x)) \Rightarrow (x - h \in B_r(x))$, и рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi : [-1, 1] \to B_r(x) ,$$

заданную формулой $\varphi(t) = f(x+th)$. По построению $\varphi \in C^l[-1, 1]$, поэтому к ней применима формула Тейлора

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k!} \varphi_0^{(k)} + R_l(x, \tau)$$

с остаточным членом в форме Лагранжа или Пеано. Отсюда посредством леммы 5.2 получаем требуемое. •

6 Простейшие варианты теоремы о неявной функции

Теорема 6.1 *Пусть функция $F : O_{(x_0,y_0)} \to \mathbb{R}$, $O_{(x_0,y_0) \subset \mathbb{R}^2}$ такова, что*

(i) $F \in C^k(O_{(x_0,y_0)}, \mathbb{R})$, $k \geq 1$*;*
(ii) $F(x_0, y_0) = 0$*;*
(iii) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$*,*
то существует прямоугольник $\Pi = \Pi_x \times \Pi_y$ *(где* $\Pi_x = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \alpha\}$, $\Pi_y = \{y \in \mathbb{R} : |y - y_0| < \beta\}$*),* $\Pi \subset O_{(x_0,y_0)}$ *и такая функция* $f \in C^k(\Pi_x, \Pi_y)$*, что* $\forall (x,y) \in \Pi$

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)\,,$$

причем производная функции $y = f(x)$ *в точках* $x \in \Pi_x$ *может быть вычислена по формуле*

$$f'(x) = -[F'_y(x, f(x))]^{-1}[F'_x(x, f(x))]\,.$$

Прежде чем приступить к доказательству, отметим, что формулировке теоремы присутствует *открытый* прямоугольник Π. Затем обратим внимание, что теорема 6.1 устанавливает однозначную разрешимость уравнения $F(x,y) = 0$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), причем функция $y = f(x)$ является этим решением. Иначе можно сказать, что часть множества

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = 0\}\,,$$

попавшая в окрестность $\Pi = \Pi_x \times \Pi_y$ точки (x_0, y_0), является графиком некоторой функции $f : \Pi_x \to \Pi_y$ класса $C^k(\Pi_x, \Pi_y)$.

$\circ$ Пусть для определенности $F'_y(x_0, y_0) > 0$. Поскольку $F \in C^1(O, \mathbb{R})$, то $F'_y(x,y) > 0$ также в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Без ограничения обшности считаем эту окрестность окрестностью $O_{(x_0,y_0)}$. Более того, уменьшая, если нужно, окрестность $O_{(x_0,y_0)}$, считаем ее кругом некоторого радиуса $r = 2\beta > 0$ с центром в точке (x_0, y_0).

Поскольку $F'_y(x,y) > 0$ в O, то функция $F(x_0, y)$ от y определена и строго возрастает на отрезке $y_0 - \beta \leq y \leq y_0 + \beta$, поэтому

$$F(x_0, y_0 - \beta) < F(x_0, y_0) = 0\,,\;\; F(x_0, y_0 + \beta) > F(x_0, y_0) = 0\,.$$

Покажем теперь, что прямоугольник $\Pi = \Pi_x \times \Pi_y$, где

$$\Pi_x = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \alpha\}\,,\;\; \Pi_y = \{y \in \mathbb{R} : |y - y_0| < \beta\}\,,$$

является искомым прямоугольником. При каждом $x \in \Pi_x$ фиксируем вертикальный отрезок с концами $(x, y_0 - \beta)$, $(x, y_0 + \beta)$. Рассматривая на нем $F(x, y)$ как функцию от y, мы получим строго возрастающую непрерывную функцию, принимающую значения разных знаков на концах отрезка. Следовательно, при $x \in \Pi_x$ найдется единственная точка $y(x) \in \Pi_y$ такая, что $F(x, y(x)) = 0$. Полагая, что $y(x) \equiv f(x)$, получим требуемое.

Теперь установим, что $f \in C^k(\Pi_x, \Pi_y)$.

Покажем прежде всего, что функция f непрерывна в точке x_0 и что $f(x_0) = y_0$. Последнее равенство, очевидно, вытекает из того, что при $x = x_0$ имеется единственная точка $y(x_0) = \Pi_y$ такая, что $F(x_0, f(x_0)) = 0$. Вместе с тем по условию $F(x_0, y_0) = 0$, поэтому $f(x_0) = y_0$.

Фиксировав число ε, $o < \varepsilon < \beta$, мы можем повторить доказательство существования функции $f(x)$ и найти число δ, $0 < \delta < \alpha$ так, что в прямоугольнике $\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}_x \times \tilde{\Pi}_y$, где

$$\tilde{\Pi}_x = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}\,, \ \ \tilde{\Pi}_y = \{y \in \mathbb{R} : |y - y_0| < \varepsilon\}\,,$$

будет выполнено

$$(F(x, y) = 0 \text{ в } = \tilde{\Pi}) \Leftrightarrow (y = \tilde{f}(x), x \in \tilde{\Pi}_x)$$

с некоторой вновь найденой функцией $\tilde{f} : \tilde{\Pi}_x \to \tilde{\Pi}_y$. Но $\tilde{\Pi}_x \subset \Pi_x$. $\tilde{\Pi}_y \subset \Pi_y$, $\tilde{\Pi} \subset \Pi$. Поэтому $f \equiv \tilde{f}$ при $x \in \tilde{\Pi}_x$. Тем самым проверено, что

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - y_0| < \varepsilon \text{ при } |x - x_0| < \delta\,.$$

Мы установили непрерывность функции f в точке x_0. Но любая точка $(x, y) \in \Pi$, в которой $F(x, y) = 0$, также может быть принята в качестве исходной точки построения, ибо в ней выполнены условия (ii) и (iii). Проведя все рассуждения относительно этой точки, мы бы пришли к выводу о непрерывности функции f в точке x. Таким образом, установлено, что $f \in C(\Pi_x, \Pi_y)$.

Покажем теперь, что $f \in C^1(\Pi_x, \Pi_y)$. Пусть Δx таково, что $x + \Delta x \in \Pi_x$. Пусть $y = f(x)$ и $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Тогда

$$0 = F(x+\Delta x, f(x+\Delta x)) - F(x, f(x)) = F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y) =$$

$F'_x(x+\Theta\Delta x, y+\Theta\Delta y)\Delta x + F'_y(x+\Theta\Delta x, y+\Theta\Delta y)\Delta y\,,\ \ \Theta \in (0,1)$ в силу теоремы о среднем. Отсюда, учитывая, что $F'_y(x,y) \neq 0$ в Π, получаем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x+\Theta\Delta x, y+\Theta\Delta y)}{F'_y(x+\Theta\Delta x, y+\Theta\Delta y)}\,.$$

Поскольку $f \in C(\Pi_x, \Pi_y)$, то при $\Delta x \to 0$ и, учитывая, что $F \in C^1(O, \mathbb{R})$, то из предыдущего в пределе при $\Delta x \to 0$ получаем

$$f'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}\,. \tag{6.9}$$

В силу теоремы о непрерывности композиции следует, что $f \in C^1(\Pi_x, \Pi_y)$. Если $F \in C^2(O, \mathbb{R})$, то из (6.9) получаем, что

$$f''(x) = -\frac{[F''_{xx} + F''_{xy}f'(x)]F'_y - F'_x[F''_{xy} + F''_{yy}f'(x)]}{(F'_y)^2}\,,$$

где F'_y, F''_{xx}, F''_{xy} и F''_{yy} вычисляются в точке $(x, f(x))$. Таким образом, $f \in C^2(\Pi_x, \Pi_y)$, если $F \in C^2(o, \mathbb{R})$. Отсюда по индукции заключаем, что $f \in C^k(\Pi_x, \Pi_y)$, если $F \in C^k(O, \mathbb{R})$. •

Теорема 6.2 *Пусть функция $F : O \to \mathbb{R}$, $O \subset \mathbb{R}^{m+1}$ — окрестность точки $(x_0, y_0) = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^m, y_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$, такова, что*

(i) $F \in C^k(O, \mathbb{R})$, $k \geq 1$;

(ii) $F(x_0, y_0) = F(x_0^1, \dots, x_0^m, y_0) = 0$;

(iii) $F'_y(x_0, y_0) = F(x_0^1, \dots, x_0^m, y_0) \neq 0$.

Тогда существует прямоугольник $\Pi = \Pi_x^m \times \Pi_y$ (где $\Pi_x^m = \{x = (x_0^1, \dots, x_0^m) \in \mathbb{R}^m : |x^i - x_0^i| < \alpha^i\,,\ i = 1, \dots, m\}$, $\Pi_y = \{y \in \mathbb{R} : |y - y_0| < \beta\}$), $\Pi \subset O \subset \mathbb{R}^m$ и такая функция $f \in C^k(\Pi_x^m, \Pi_y)$, что для любой точки $(x,y) \in \Pi$ имеет место

$$F(x^1, \dots, x^m, y) = 0 \Leftrightarrow (y = f(x^1, \dots, x^m, y))\,,$$

причем частные производные функции $y = f(x)$ в точках $x \in \Pi_x^m$ вычисляются по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = -[F'_y(x, f(x))]^{-1}[F'_{x^i}(x, f(x))]\,.$$

∘ Доказательство существования прямоугольника $\Pi = \Pi_x^m \times \Pi_y$, функции $y = f(x) = f(x^1, \dots, x^m)$ и ее непрерывности в Π_x^m дословно повторяет соответствующие части доказательства теоремв 6.1 с единственным изменением, которое сводится к тому, что под символом x надо понимать $(x^1, \dots, x^m)$, а под символом α — набор $(\alpha^1, \dots, \alpha^m)$.

Если теперь в функциях $F(x^1, \dots, x^m, y)$ и $y = f(x^1, \dots, x^m)$ фиксировать все переменные кроме x^i и y, то окажемся в условиях теоремы 6.1, где роль x выполняет x^i. Отсюда следует утверждение теоремы. •

7 Теорема о неявной функции

Теперь перейдем к общему случаю системы уравнений

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = 0\,; \\ F^2(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = 0\,; \\ \dots \\ F^n(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = 0\,. \end{cases} \tag{7.10}$$

Для краткости условимся: $x = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m$, $y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$, систему (7.10) будем записывать как $F(x, y) = 0$. Будем решать эту систему относительно $y^1, \dots, y^n$, т. е. искать локально эквивалентную системе (7.10) систему уравнений

$$\begin{cases} y^1 = f^1(x^1, \dots, x^m)\,; \\ y^2 = f^2(x^1, \dots, x^m)\,; \\ \dots \\ y^n = f^n(x^1, \dots, x^m)\,, \end{cases} \tag{7.11}$$

которую кратко запишем $y = f(x)$, где $f = \mathrm{col}(f^1, \dots, f^n)$. Далее, если $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m)$, $y_0 = (y_0^1, \dots, y_0^m)$, $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^m)$, $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^n)$, то запись $|x - x_0| < \alpha$ или $|y = y_0| < \beta$ будет означать соответственно, что $|x^i - x_0^i| < \alpha^i$, $i = 1, \dots, m$ и $|y^j - y_0^j| < \beta^j$, $j = 1, \dots, n$. И наконец, положим

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} (x)\,;$$

$$F'_x(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} (x,y)\,;$$

$$F'_y(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F^n}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{pmatrix} (x,y)\,.$$

Заметим, что матрица $F'_y(x,y)$ — квадратная, поэтому она обратима точно тогда, когда ее определитель отличен от нуля. В случае $n = 1$ она сводится к единственному элементу, и в этом случае обратимость матрицы $F'_y(x,y)$ равносильна тому, что этот единственный элемент отличен от нуля. Матрицу, обратную к $F'_y(x,y)$, будем, как обычно, обозначать символом $[F'_y(x,y)]^{-1}$.

Теорема 7.1 *Пусть вектор-функция* $F : O_{(x_0,y_0)} \to \mathbb{R}^n$, $O_{(x_0,y_0)} \subset \mathbb{R}^{m+n}$, *такова, что*

(i) $F \in C^k(O,\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$;

(ii) $F(x_0,y_0) = 0$;

(iii) $F'_y(x_0,y_0)$ — *обратимая матрица.*

Тогда существует $m \times n$ — *мерный прямоугольник* $\Pi = \Pi^m_x \times \Pi^n_y \subset O$ *(где* $\Pi^m_x = \{x \in \mathbb{R}^m : |x^i - x^i_0| < \alpha\}$, $\Pi^n_y = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - y_0| < \beta\}$*) и вектор-функция* $f \in C^k(\Pi^m_x, \Pi^n_y)$ *такая, что для любой точки* $(x,y) \in \Pi$ *имеем*

$$(F(x,y) = 0) \Leftrightarrow (y = f(x))\,,$$

причем матрица Якоби вектор-функции f *может быть найдена по формуле*

$$f'_x(x) = -[F'_y(x,y)]^{-1}[F'_x(x,y)]\,.$$

○ Доказательство проведем методом индукции по n.

При $n = 1$ теорема совпадает с теоремой 6.2 и потому верна.

Пусть теорема справедлива для $n-1$. Покажем, что она тогда справедлива и для n.

1. По условию $\det F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, следовательно $\det F'_y(x, y) \neq 0$ в некоторой окрестности $O'(x_0, y_0)$. (Не теряя общности можно отождествить $O'(x_0, y_0) = O(x_0, y_0)$). Поэтому по крайней мере один элемент последней строки этой матрицы отличен от нуля. С точностью до перемены обозначений можно считать, что таким является элемент $\dfrac{\partial F^n}{\partial y^n}$.

2. Применяя тогда к уравнению $F^n(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^n) = 0$ теорему 6.2 найдем прямоугольник $\tilde{\Pi}^{m+n} = (\tilde{\Pi}^m_x \times \tilde{\Pi}^{n-1}_{\tilde{y}}) \times \Pi^1_{y^n} \subset O$ и такую функцию $\tilde{f} \in C^k(\tilde{\Pi}^m_x \times \tilde{\Pi}^{n-1}_{\tilde{y}}, \tilde{\Pi}^1_y)$, что

$$(F^n(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^n) = 0 \text{ в } \tilde{\Pi}^{m+k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y^n = \tilde{f}(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^{n-1}), (x^1, \ldots, x^m) \in \tilde{\Pi}^m_x, (y^1, \ldots, y^{n-1}) \in \tilde{\Pi}^{n-1}_y) \,.$$

3. Подставляя $y^n = \tilde{f}(x, y^1, \ldots, y^{n-1})$, в первые $n-1$ уравнение системы (7.10), получим $n-1$ соотношение:

$$\begin{cases} \Phi^1(x, y^1, \ldots, y^{n-1}) := F^1(x, y^1, \ldots, y^{n-1}, \tilde{f}(x, y^1, \ldots, y^{n-1})) = 0\,; \\ \Phi^2(x, y^1, \ldots, y^{n-1}) := F^2(x, y^1, \ldots, y^{n-1}, \tilde{f}(x, y^1, \ldots, y^{n-1})) = 0\,; \\ \cdots \\ \Phi^{n-1}(x, y^1, \ldots, y^{n-1}) := F^{n-1}(x, y^1, \ldots, y^{n-1}, \tilde{f}(x, y^1, \ldots, y^{n-1})) = 0\,, \end{cases} \tag{7.12}$$

$\Phi^i \in C^k(\tilde{\Pi}^m_x \times \tilde{\Pi}^n_y, \mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, n-1$, как композиция функций класса C^k. Кроме того, $\Phi^i(x_0, y^1_0, \ldots, y^{n-1}_0) = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, так как $\tilde{f}(x_0, y^1_0, \ldots, y^{n-1}_0) = y^n_0$ и $F(x_0, y_0) = 0$. Обозначим через $\Phi(x, y^1, \ldots, y^{n-1})$ колонку $\mathrm{col}(\Phi^1, \ldots, \Phi^{n-1}$, а через $\tilde{y} = (y^1, \ldots, y^{n-1})$. Покажем, что квадратная матрица $\Phi'_{\tilde{y}}(x_0, \tilde{y}_0)$ порядка $n-1$ обратима.

Для этого продифференцируем функции Φ^i:

$$\frac{\partial \Phi^i}{\partial y^j} = \frac{\partial F^i}{\partial y^j} + \frac{\partial F^i}{\partial y^n} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^j} \;\; (i, j = 1, \ldots, n-1)\,.$$

Положим еще

$$\Phi^n(x, y^1, \ldots, y^{n-1}) := F^n(x, y^1, \ldots, y^{n-1}, \tilde{f}(x, y^1, \ldots, y^{n-1}))\,.$$

В силу определения $\tilde{f}$ имеем, что $\Phi^n \equiv 0$ в области своего определения, поэтому

$$\frac{\partial \Phi^n}{\partial y^i} = \frac{\partial F^n}{\partial y^i} + \frac{\partial F^n}{\partial y^n}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^i} \equiv 0 \quad i = 1, \dots, n-1\,.$$

Теперь рассмотрим определитель

$$\det F'_y(x,y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F^n}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} + \frac{\partial F^1}{\partial y^n}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^{n-1}} + \frac{\partial F^1}{\partial y^n}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^{n-1}} & \frac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F^n}{\partial y^1} + \frac{\partial F^n}{\partial y^n}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y^{n-1}} + \frac{\partial F^n}{\partial y^n}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^{n-1}} & \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial \Phi^1}{\partial y^{n-1}} & \frac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Phi^{n-1}}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial \Phi^{n-1}}{\partial y^{n-1}} & \frac{\partial F^{n-1}}{\partial y^n} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}.$$

(Здесь первое и последнее равенства справедливы в силу определений. Второе равенство справедливо в силу того, что значение определителя не изменится, если к любому его столбцу прибавить другой столбец, умноженный на константу.) По предположению $\dfrac{\partial F^n}{\partial y^n} \neq 0$, по условию $\det F'_y(x,y) \neq 0$. Следовательно, в некоторой окрестности точки $(x_0, \tilde{y}_0)$ отличен от нуля и определитель

$$\det \Phi'_{\tilde{y}}(x,y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial \Phi^1}{\partial y^{n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Phi^{n-1}}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial \Phi^{n-1}}{\partial y^{n-1}} \end{pmatrix} (x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^{n-1})\,.$$

Тогда в силу индуктивного предположения найдутся прямоугольник $\Pi^{m+n-1} = \Pi^m_x \times \Pi^{n-1}_y \subset \tilde{\Pi}^m_x \times \tilde{\Pi}^{n-1}_y$, содержащий точку $(x^i_0, \dots, x^m_0, y^1_0, \dots, y^{n-1}_0) \in \mathbb{R}^{m+n-1}$, и такая вектор-функция

$f \in C^k(\Pi_x^m, \Pi_y^{n-1})$, что в Π^{m+n-1} система (7.12) равносильна соотношениям

$$\begin{cases} y^1 = f^1(x^1, \ldots, x^m)\,; \\ y^2 = f^2(x^1, \ldots, x^m)\,; \\ \ldots \\ y^{n-1} = f^{n-1}(x^1, \ldots, x^m)\,. \end{cases} \tag{7.13}$$

4. Поскольку $\Pi_y^{n-1} \subset \tilde{\Pi}_y^{n-1}$, $\Pi_x^m \subset \tilde{\Pi}_x^m$, то, подставляя $f^1, \ldots, f^{n-1}$ вместо соответствующих переменных в $y^n = \tilde{f}(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^{n-1})$, получаем функцию $y^n = f(x^1, \ldots, x^m) := \tilde{f}(x^1, \ldots, x^m, f^1(x^1, \ldots, x^m), \ldots, f^{n-1}(x^1, \ldots, x$

Полученная в результате система (7.11) равносильна системе (7.10). В самом деле, сначала мы в прямоугольнике $\tilde{\Pi}^{m+n}$ заменим последнее уравнение системы (7.10) эквивалентным ему уравнением $y^n = \tilde{f}(x, \tilde{y})$, т. е. получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} \Phi^1(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^{n-1}) = 0\,; \\ \Phi^2(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^{n-1}) = 0\,; \\ \ldots \\ \Phi^{n-1}(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^{n-1}) = 0\,; \\ y^n = \tilde{f}(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^{n-1})\,. \end{cases}$$

Первые $n-1$ уравнений полученной системы в прямоугольнике $\Pi_x^m \times \Pi_y^{n-1} \subset \tilde{\Pi}_x^m \times \tilde{\Pi}_y^{n-1}$ мы заменили равносильными им соотношениями (7.13). После этого перешли окончательно к системе (7.11), заменив в уравнении

$$y^n = \tilde{f}(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^{n-1})$$

переменные $y^1, \ldots, y^{n-1}$ их выражениями из (7.13).

5. Докажем теперь формулу

$$f'_x(x) = -[F'_y(x, y)]^{-1}[F'_x(x, y)]\,.$$

Поскольку в прямоугольнике $\Pi = \Pi_x^m \times \Pi_y^n$ системы (7.10) и (7.11) эквивалентны, то

$$F(x, f(x)) \equiv 0, \text{ если } x \in \Pi_x^m\,.$$

В координатах это означает, что

$$F^i(x^1, \ldots, x^m, f^1(x^1, \ldots, x^m), \ldots, f^n(x^1, \ldots, x^m)) \equiv 0\,.$$

Поскольку $f \in C^k(\Pi_x^m, \Pi_y^n)$ и $F \in C^k(O, \mathbb{R}^n)$, где $k \geq 1$, то $F(\cdot, f(\cdot)) \in C^k(\Pi_x^M, \mathbb{R}^n)$. Поэтому имеет смысл

$$\frac{\partial F^i}{\partial x^i} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial F^i}{\partial y^k} \frac{\partial f^k}{\partial x^j} = 0\,, \quad i = 1, \ldots, n\,, \; j = 1, \ldots, m\,.$$

Эти соотношения, очевидно, эквивалентны матричному равенству

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \cdot f'(x) = 0\,,$$

в котором $y = f(x)$. Учитывая обратимость матрицы $F'_y(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0), получаем требуемое. $\bullet$

4 ДИФФЕОМОРФИЗМЫ, ПОВЕРХНОСТИ И ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ

> Том решил, что теперь он может обойтись без Бекки Тетгер. С него довольно славы. Он будет жить ради славы.
> *Марк Твен. "Приключения Тома Сойера"*

1 Определение и свойства диффеоморфизма

Определение 1.1 Пусть $\Omega_x \subset \mathbb{R}^n_x$ и $\Omega_y \subset \mathbb{R}^n_y$–две области. Вектор-функция $\varphi : \Omega_x \to \Omega_y$ называется *диффеоморфизмом*, если

(i) $\varphi : \Omega_x \to \Omega_y$–биекция;
(ii) $\varphi \in C^1(\Omega_x; \Omega_y)$;
(iii) $\varphi^{-1} \in \mathrm{C}^1(\Omega_y; \Omega_x)$.

Пример 1.1 Функция $\varphi : x \to \mathrm{tg}x$, отображающая интервал $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ на $\mathbb{R}$, есть диффеоморфизм.

Пример 1.2 Функция $\varphi : x \to x^3$, отображающая интервал $(-1, 1)$ на себя, биективна и непрерывно дифференцируема. Однако диффеоморфизмом она не является, поскольку обратная функция $\varphi^{-1} : y \to \sqrt[3]{y}$ не дифференцируема в точке нуль.

Теорема 1.1 *Пусть вектор-функция $\varphi : \Omega_x \to \mathbb{R}^n$,где Ω_x– область, такова, что*

(i) $\varphi \in \mathrm{C}^1(\Omega_x; \mathbb{R}^n_y)$;
(ii) $y_0 = \varphi(x_0)$ *при* $x_0 \in \Omega_x$;
(ii) $\det J_\varphi(x_0) \neq 0$.

Тогда существуют окрестности $O_{x_0} \subset \Omega_x$ и $O_{y_0} \subset \mathbb{R}^n_y$ такие, что $\varphi : O_{x_0} \to O_{y_0}$–диффеоморфизм, причем

$$(\varphi^{-1})'(y) = (\varphi'(x))^{-1}$$

при любом $x \in O_{x_0}$ и таком $y \in O_{y_0}$, что $\varphi(x) = y$.

$\circ$ Соотношение $y = \varphi(x)$ перепишем в виде $\Phi(x, y) = \varphi(x) - y = 0$. Вектор-функция $\Phi(x, y) : \overline{\Omega}_x \times \mathbb{R}^n_y \to \mathbb{R}^n$, причем

(i) $\Phi \in \mathrm{C}^1(\Omega_x \times \mathbb{R}^n_y, \mathbb{R}^n)$;

(ii) $\Phi(x_0, y_0) = 0$;

(iii) $\det\Phi'_x(x_0, y_0) = \det J_\varphi(x_0) \neq 0$.

По теореме о неявной функции найдется окрестность $O_{x_0} \times O_{y_0}$ точки (x_0, y_0) и вектор-функция $\psi \in \mathrm{C}^1(O_{x_0}, O_{y_0})$ такие, что при любых $(x, y) \in O_{x_0} \times O_{y_0}$

$$(\psi(x) - y = 0) \Leftrightarrow (y = \psi(x));$$

$$\psi'(y) = -(\Phi'_x(x, y))^{-1}(\Phi'_y(x, y)).$$

В нашем случае $\Phi'_x(x, y) = \varphi'(x)$, $\Phi'_y(x, y) = -I$ (т. е. единичная матрица), поэтому $\psi'(y) = (\varphi'(x))^{-1}$. Наконец, заметим, что $\psi^{-1} = \varphi$. $\bullet$

Замечание 1.1 Условие (iii) теоремы 1.1 при всей его экзотичности в действительности есть обычное свойство *любого* диффеоморфизма. Действительно, пусть $\varphi : \Omega_x \to \Omega_y$ некоторый диффеоморфизм, и пусть существует точка $x_0 \in \Omega_x$ такая, что $\det J_\varphi(x_0) = 0$. Поскольку при любом $x \in \Omega_x \quad x = \varphi^{-1} \circ \varphi(x)$, то $I = J_{\varphi^{-1}}(\varphi(x_0)) \cdot J_\varphi(x_0)$. Отсюда вытекает, что φ^{-1} в точке $\varphi(x_0)$ не существует. Это противоречит определению диффеоморфизма.

Пример 1.3 Рассмотрим вектор-функцию $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, определенную формулой

$$\varphi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Якобиан вектор-функции φ

$$\det J_\varphi(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho > 0.$$

Однако точки (ρ, θ) и $(\rho, \theta + 2\pi)$ переходят при отображении φ в одну и ту же точку, поэтому φ не является диффеоморфизмом.

С другой стороны, в силу теоремы 1.1 для каждой пары точек (ρ_0, θ_0) и (x_0, y_0), где

$$x_0 = \rho_0 \cos\theta_0, \quad y_0 = \rho_0 \sin\theta_0.$$

существуют окрестности $O_{(\rho_0,\theta_0)}$ и $O_{(x_0,y_0)}$ такие, что $\varphi : O_{(\rho_0,\theta_0)} \to O_{(x_0,y_0)}$–диффеоморфизм.

Определение 1.2 Вектор-функция $\varphi : \Omega_x \to \mathbb{R}^n_y$ называется *локальным диффеоморфизмом*, если для любого $x \in \Omega_x$ существует окрестность, в которой φ–диффеоморфизм.

Перейдем к рассмотрению свойств диффеоморфизмов.

Теорема 1.2 *Пусть $\Gamma \subset \Omega_x \subset \mathbb{R}^n_x$–гладкая кривая, $\varphi : \Omega_x \to \Omega_y \subset \mathbb{R}^n_y$–диффеоморфизм. Тогда $\varphi[\Gamma] \subset \Omega_y$–тоже гладкая кривая.*

$\circ$ Пусть $\Gamma = \Gamma(t) = \mathrm{col}(\gamma^1(t), \gamma^2(t), \ldots, \gamma^n(t)), \quad t \in (a, b)$. В силу теоремы о дифференцируемости композиции вектор-функция

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi^1(\gamma^1(t), \gamma^2(t), \ldots, \gamma^n(t)) \\ \ldots \\ \varphi^n(\gamma^1(t), \gamma^2(t), \ldots, \gamma^n(t)) \end{pmatrix}$$

Очевидно, непрерывно дифференцируема. $\bullet$

Теорема 1.3 *Пусть $\varphi : \Omega_x \to \Omega_y$–диффеоморфизм, причем $\Omega \subset \Omega_x$–некоторая область. Тогда $\varphi[\Omega] \subset \Omega_y$ тоже область, причем $\partial\varphi[\Omega] = \varphi[\partial\Omega]$.*

$\circ$ Пусть точка $x_0 \in \Omega$. В силу теоремы 10.1 с учетом замечания 10.1 существуют окрестности $O_{x_0} \subset \Omega$ и $O_{y_0} \subset \varphi[\Omega]$ точек x_0 и $y_0 = \varphi(x_0)$ такие, что $\varphi[O_{x_0}] = O_{y_0}$. Это значит, что $\varphi[\Omega]$–открытое множество. В силу теоремы 10.2 получаем, что $\varphi[\Omega]$–связное множество. Итак, $\varphi[\Omega]$–область.

Теперь пусть точка $x_0 \in \partial\Omega$, т. е.

$$\forall\, O_{x_0} \subset \Omega_x \quad (\Omega \cap O_{x_0} \neq \emptyset) \wedge ((\Omega_x \setminus \Omega) \cap O_{x_0} \neq \emptyset).$$

Предположим, что $\varphi(x_0) \in \varphi[\Omega]$. В силу сказанного выше существует окрестность O_{x_0} такая, что $\varphi[O_{x_0}] \subset \varphi[\Omega]$, что противоречит предположению $x_0 \in \partial\Omega$. Аналогично рассматривается случай $x_0 \notin \overline{\Omega}$. $\bullet$

2 Поверхности

Пусть $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^n$ — векторные пространства, причем $k \leq n$. Точки пространства $\mathbb{R}^k$ будем обозначать символами $t = (t^1, t^2, \ldots, t^k)$, а точки пространства $\mathbb{R}^n$ — символами $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$.

Определение 2.1 Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется *k-мерной поверхностью* (или просто *поверхностью*), если существует область $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ и диффеоморфизм $\varphi : \Omega \to S$.

Пример 2.1 Пространство $\mathbb{R}^n$ является n-мерной поверхностью. Действительно вектор-функция $\varphi = \varphi(t^1, t^2, \ldots, t^n) = \mathrm{col}(\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2}t^1, \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2}t^2, \ldots, \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2}t$ отображает открытый куб $\Pi = \{t \in \mathbb{R}^n_t : -1 < t^i < 1, i = 1, 2, \ldots, n\}$ пространства $\mathbb{R}^n_t$ биективно на все пространство $\mathbb{R}^n_x$, причем производная

$$\varphi'_t = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2}\cos^{-2}\frac{\pi}{2}t^1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2}\cos^{-2}\frac{\pi}{2}t^2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{\pi}{2}\cos^{-2}\frac{\pi}{2}t^n \end{pmatrix}$$

непрерывна в каждой точке $t \in \Pi$. Обратная вектор-функция $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^n_x \to \Pi$ задается формулой $\varphi^{-1} = \varphi^{-1}(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \mathrm{col}(\frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,x^1, \frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,x^2, \ldots, \frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,x^n)$. Ее производная

$$(\varphi^{-1})'_x = \begin{pmatrix} \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+(x^1)^2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+(x^2)^2} & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+(x^n)^2} \end{pmatrix}$$

тоже непрерывна в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n_x$.

Пример 2.2 Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}_t$, а функция $f \in C^1(\Omega)$ отображает Ω на некоторое множество $\mathrm{im}\, f \subset \mathbb{R}$. Отображение $\varphi = \varphi(t) \equiv \mathrm{col}(t^1, t^2, \ldots, t^{n-1}, f(t^1, t^2, \ldots, t^{n-1}))$ биективно отображает область Ω на график функции f по построению. Это отображение будет диффеоморфизмом, поскольку производная

$$\varphi'_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ f'_{t^1} & f'_{t^2} & \dots, f'_{t^{n-1}} & \end{pmatrix}$$

непрерывна в каждой точке $t \in \Omega$, а обратная вектор-функция задается формулой $\varphi^{-1} = \varphi^{-1}(x) \equiv \mathrm{col}(x^1, x^2, \dots, x^{n-1}, 0)$. Производная $(\varphi^{-1})'_x$, очевидно, непрерывна в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$.

Пример 2.3 Пусть $k = 1$. Вектор-функцию $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ зададим формулой $\varphi = \varphi(t) \equiv \mathrm{col}(\varphi^1(t), \varphi^2(t), \dots, \varphi^n(t))$, где каждая функция $\varphi^i : (a, b) \to \mathbb{R}$ есть диффеоморфизм. Обратная вектор-функция задается любой из формул $\varphi^{-1}(x) = (\varphi^i)^{-1}(x)$ $i = 1, 2, \dots, n$. Она, очевидно, непрерывно дифференцируема. Образ интервала (a, b) при отображении φ называется *гладкой кривой*.

Замечание 2.1 Наше определение k-мерной поверхности очень жесткое, в частности, оно не позволяет двумерной сфере

$$S_R^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = R^2\}$$

называтся двумерной поверхностью в $\mathbb{R}^3$, поскольку не существует диффеоморфного отображения этой сферы ни на какую область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Однако-вектор-функция

$$\varphi = \varphi(t) \equiv \begin{pmatrix} R\cos 2\pi t^1 \sin \pi t^2 \\ R\sin 2\pi t^1 \sin \pi t^2 \\ R\cos \pi t^2 \end{pmatrix}$$

диффеоморфно отображает открытый квадрат $(0,1) \times (0,1)$ на сферу S_R^2, разрезанную вдоль меридиана $\{x^2 = 0\} \cap \{x^1 \geq 0\}$. Это обстоятельство примиряет нас с нашим определением k-мерной поверхности, так как в будущем различия между поверхностями с разрезами и без них нас не будут интересовать.

Теорема 2.1 *Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, а множество $S \subset \mathbb{R}^n$. Пусть существует биективная вектор-функция $\varphi \in C^1(\Omega; S)$ такая, что* $\operatorname{rank} J_\varphi(t) = k \ \forall t \in \Omega$. *Тогда $\varphi : \Omega \to S$ — диффеоморфизм.*

○ Рассмотрим матрицу Якоби J_φ вектор-функции φ

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial t^1} & \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial t^2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial t^k} \\ \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial t^1} & \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial t^2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial t^k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \varphi^n}{\partial t^1} & \dfrac{\partial \varphi^n}{\partial t^2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi^n}{\partial t^k} \end{pmatrix} = J_\varphi$$

в каждой точке $t \in \Omega$. По условию $k \leq n$, поэтому максимальный ранг матрицы J_φ, очевидно, равен k. В силу теоремы о неявной функции вектор-функция φ диффеоморфно отображает некоторую окрестность каждой точки $t \in \Omega$ в S. Учитывая, что отображение $\varphi : \Omega \to S$ биективно, получим требуемое. ●

Пример 2.4 Отметим существенность требования биективности вектор-функции $\varphi : \Omega \to S$ в теореме 2.1. Действительно, ранг матрицы Якоби вектор-функции $\varphi = \varphi(t) \equiv \mathrm{col}(t^1 a \cos 3\pi t^2 \sin\alpha, t^1 a \cos 3\pi t^2, t^1 a \cos$ где $a > 0$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, при $t_1 > 0$ равен двум, поскольку определитель двух верхних строк равен $t^1 3\pi a^2 \sin^2\alpha \neq 0$.

$$J_\varphi(t) = \begin{pmatrix} a\cos 3\pi t^2 \sin\alpha & -t^1 3\pi a \sin 3\pi t^2 \sin\alpha \\ a \sin 3\pi t^2 \sin\alpha & t^1 3\pi a \cos 3\pi t^2 \sin\alpha \\ a\cos\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Однако вектор-функция φ не будет диффеоморфизмом, поскольку отображает квадрат $(0,1)\times(0,1)$ на круговой конус раствора 2α, и точки этого конуса при $x^2 \geq 0$ имеют по два прообраза.

3 Матрица Грама диффеоморфизма

Начиная с этого места, мы считаем пространство $\mathbb{R}^n$ евклидовым, т. е. считаем заданным скалярное произведение $< \cdot, \cdot >$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по формуле

$$< x_1, x_2 >= x_1^1 x_2^1 + x_1^2 x_2^2 + \ldots + x_1^n x_2^n \,.$$

Определение 3.1 Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ — область, $S \subset \mathbb{R}^n$ — k-мерная поверхность и $\varphi : \Omega \to S$ — диффеоморфизм. *Матрицей Грама диффеоморфизма* φ называется матрица $G_\varphi = J_\varphi^* \cdot J_\varphi$, где J_φ^* — транспонированная матрица Якоби диффеоморфизма φ.

Упражнение 3.1 Показать, что $G_\varphi = \| < \varphi_i, \varphi_j > \|$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$, где $\varphi_i = \mathrm{col}\left(\dfrac{\partial\varphi^1}{\partial t^i}, \dfrac{\partial\varphi^2}{\partial t^i}, \ldots, \dfrac{\partial\varphi^n}{\partial t^i}\right)$.

Теорема 3.1 *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ — область, $S \subset \mathbb{R}^n$ — некоторое множество, $\varphi : \Omega \to S$ биективная непрерывно дифференцируемая вектор-функция, $G_\varphi(t)$ — матрица Грама вектор-функции φ в точке $t \in \Omega$. Если $\det G_\varphi(t) > 0$ $\forall t \in \Omega$, то $\varphi : \Omega \to S$ — диффеоморфизм.*

$\circ$ Пусть $\det G_\varphi(t) > 0$. Это значит, что векторы $\varphi_i(t) = \mathrm{col}\left(\dfrac{\partial\varphi^1}{\partial t^i}(t), \dfrac{\partial\varphi^2}{\partial t^i}(t), \ldots, \dfrac{\partial\varphi^n}{\partial t^i}(t)\right)$ линейно независимы в каждой точке $t \in \Omega$. Отсюда непосредственно вытекает, что $\mathrm{rank}\, J_\varphi(t) = k$ $\forall t \in \Omega$. В силу теоремы 2.1 получаем требуемое. $\bullet$

Определитель $\det G_\varphi$ матрицы Грама диффеоморфизма $\varphi : \Omega \to S$ называется *определителем Грама.* Найдем матрицы и определители Грама диффеоморфизмов, рассмотренных в примерах 2.1-2.3.

Пример 3.1 Пусть $k = n$. В этом случае имеем

$$G_\varphi = J_\varphi^* \cdot J_\varphi\,,$$

$$\det G_\varphi = \det J_\varphi^* \cdot J_\varphi = \det J_\varphi^* \cdot \det J_\varphi = (\det J_\varphi)^2\,,$$

поскольку матрица Якоби J_φ диффеоморфизма φ — квадратная матрица порядка n. Возвращаясь к примеру 2.1, получим

$$G_\varphi(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\pi^2}{4}\cos^{-4} t^1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \dfrac{\pi^2}{4}\cos^{-4} t^2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & \dfrac{\pi^2}{4}\cos^{-4} t^n \end{pmatrix},$$

$$\det G_\varphi(t) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \prod_{i=1}^{n} \cos^{-4} t^i\,.$$

Пример 3.2 Пусть $k = n - 1$, и диффеоморфизм φ такой же, как в примере 2.2. Тогда

$$G_\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 + (f'_{t^1})^2 & f'_{t^1} \cdot f'_{t^2} & \dots & f'_{t^1} \cdot f'_{t^{n-1}} \\ f'_{t^2} \cdot f'_{t^1} & 1 + (f'_{t^2})^2 & \dots & f'_{t^2} \cdot f'_{t^{n-1}} \\ . & . & . & . \\ f'_{t^{n-1}} \cdot f'_{t^1} & f'_{t^{n-1}} \cdot f'_{t^1} & \dots & 1 + (f'_{t^{n-1}})^2 \end{pmatrix}.$$

Определитель Грама равен

$$\det G_\varphi = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (f'_{t^i})^2 \tag{3.1}$$

Упражнение 3.2 Доказать формулу (3.1).

Пример 3.3 В случае $k = 1$ матрица Грама и ее определитель совпадают

$$G_\varphi = \det G_\varphi = (\varphi_t^{1'})^2 + (\varphi_t^{2'})^2 + \ldots + (\varphi_t^{n'})^2 .$$

4 Экстремумы функций

Определение 4.1 Функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет *локальный минимум максимум* в точке x_0 области $X \subset \mathbb{R}^n$, если существует окрестность $O_{x_0} \subset X$ такая, что $\forall x \in O_{x_0}$ $(f(x) \geq f(x_0))$ $(f(x) \leq f(x_0))$. Точки, в которых функция f имеет локальный минимум или локальный максимум, называются *точками экстремума* функции f. Значения, которые функция f принимает в точках экстремума, называются *экстремальными значениями*.

Теорема 4.1 *Пусть функция* $f : X \to \mathbb{R}$ *имеет в точке экстремума* x_0 *области* $X \subset \mathbb{R}^n$ *все частные производные первого порядка. Тогда*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0 , \;\; i = 1, \ldots, n .$$

$\circ$ Рассмотрим функцию $\varphi(x^1) = f(x^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$ одного переменного x^1, которая определена в некоторой окрестности точки x_0^1, имеет экстремум и производную в точке x_0^1. По теореме Ферма

$$0 = \frac{d\varphi}{dx^1}(x_0^1) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)\,.\bullet$$

Следует отметить, что теорема 4.1 дает лишь *необходимые условия экстремума.* К примеру, функция $f(x, y) = x^3$ имеет в точке $(0, 0)$ все частные производные первого порядка, которые равны нулю, однако экстремума в этой точке нет.

Определение 4.2 Точка x_0 области $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *критической точкой* функции $f : X \to \mathbb{R}$, если

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0\,, \;\; i = 1, \ldots, n\,.$$

Понятно, что среди критических точек могут оказаться точки экстремума функции. Чтобы их выявить, мы сформулируем и докажем достаточные условия экстремума, но прежде напомним некоторые понятия линейной алгебры.

Квадратная матрица A порядка n называется *положительно* (*отрицательно*) *определенной*, если $\forall h \in \mathbb{R}^n$ $(h \neq \mathbb{O})$ имеем $< Ah, h >> 0$ $(< Ah, h >< 0)$. Справедлив ікритерий Сильвестра[13]: квадратная матрица $A = \|a_{ij}\|$ положительно определена тогда и только тогда, когда положительны все главные миноры

$$a_{11}\,, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\,, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

этой матрицы; и отрицательно определена тогда и только тогда, когда $a_{11} < 0$, и при переходе от одного главного минора матрицы к минору следующего порядка знак значения минора меняется.

[13]Джеймс Джозеф Сильвестр (1814-1879) — английский математик; основные труды по алгебре, теории чисел, теории вероятности и др.

Квадратная матрица A порядка n называется *невырожденной*, если $\forall h \in \mathbb{R}^n (h \neq \mathbb{O}) \Rightarrow (Ah \neq \mathbb{O})$. Положительно (отрицательно) определенная матрица A очевидно невырождена. Имеется следующий критерий невырожденности матрицы A:

$$A \text{ невырождена } \Leftrightarrow \det A \neq 0\,.$$

Теперь сформулируем *достаточные условия экстремума.*

Теорема 4.2 *Пусть точка x_0, лежащая в области $X \subset \mathbb{R}^n$, — критическая точка функции $f \in C^2(X, \mathbb{R})$. Тогда*

(i) если матрица Гессе $H_f(x_0)$ положительно определена, то точка x_0 — локальный минимум; если отрицательно определена, то в точке x_0 — локальный максимум;

(ii) если матрица Гессе $H_f(x_0)$ не знакоопределена (т. е. выражение $< H_f(x_0)h, h >$ может принимать значения разных знаков), то в точке x_0 функция f экстремума не имеет.

$\circ$ Пусть вектор $h \in \mathbb{R}^n$ таков, что $x_0 + h \in X$. Запишем формулу Тейлора с учетом замечания ??

$$f(x_0+h) - f(x_0) =< \nabla f(x_0), h > + \frac{1}{2} < H_f(x_0)h, h > + o(\|h\|^2)\,.$$

Ввиду критичности точки $x_0 \in X$ и условия $h = \mathbb{O}$ перепишем эту формулу в виде

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{\|h\|^2}{2}\left(\left\langle H_f(x_0)\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\right\rangle + o(1)\right)\,, \quad (4.2)$$

где $o(1)$ — бесконечно малая при $\|h\| \to 0$. Вектор

$$\frac{h}{\|h\|} = \left(\frac{h^1}{\|h\|}, \frac{h^2}{\|h\|}, \ldots, \frac{h^n}{\|h\|}\right)$$

имеет единичную длину. Поскольку функция $F(h) =< H_f(x_0)h, h >$ непрерывна как функция из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, поэтому ее сужение на сферу $S_1(\mathbb{O}) = \partial B_1(\mathbb{O})$ тоже непрерывно. Сфера $S_1(\mathbb{O})$ — компакт, поэтому в силу теоремы Вейерштрасса функция $< H_f(x_0)h, h >$ достигает на сфере минимума m и максимума M.

Если матрица $H_f(x_0)$ положительно определена, то $0 < m \leq M$, и потому найдется число $\delta > 0$ такое, что при $\|h\| < \delta$ будет $o(1) < m$. Тогда при $\|h\| < \delta$ правая часть равенства (4.2) окажется положительной и, следовательно,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$$

при $0 < \|h\| < \delta$. Другими словами, в этом случае точка x_0 — точка локального минимума.

Если матрица $H_f(x_0)$ отрицательно определена, то $m \leq M < 0$, и аналогично показывается, что при некотором $\|h\| < \delta$ правая часть (4.2) отрицательна, и потому функция f имеет в точке x_0 локальный максимум.

Итак, утверждение (i) доказано. Перейдем к утверждению (ii). Пусть теперь e_m и e_M — те точки сферы $S_1(\mathbb{O})$, в которых $< H_f(x_0)e_m, e_m >= m$ и $< H_f(x_0)e_M, e_M >= M$, причем $m < 0 < M$. Полагая $h = te_m$, где t — достаточно малое положительное число (такое, что $x_0 + te_m \in X$), из (4.2) находим

$$f(x_0 + te_m) - f(x_0) = \frac{t^2}{2}(m + o(1))\,.$$

Отсюда видно, что, начиная с некоторого t, сумма $m + o(1)$ будет отрицательной. Тогда отрицательной будет и левая часть равенства.

Аналогично, полагая $h = te_M$, получим

$$f(x_0 + te_M) - f(x_0) = \frac{t^2}{2}(M + o(1))$$

и, следовательно, при достаточно малых значениях $t > 0$ разность $f(x_0 + te_M) - f(x_0)$ положительна. •

В теореме 4.2 требуется, чтобы минимум m и максимум M квадратичной формы $< H_f(x_0)h, h >$ обязательно были отличны от нуля. Рассмотрим

Пример 4.1 Найдем экстремум функции $f(x,y) = x^4+y^4-2x^2$. Из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 = 0 \end{cases}$$

найдем критические точки $(\pm 1, 0)$ и $(0,0)$. Теперь найдем соответствующие им матрицы Гессе.

$$H_f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ ;\ \ H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим их квадратичные формы:

$$0 \leq < H_f(\pm 1, 0)h, h >= 8(h^1)^2\,;$$

$$-4(h^1)^2 =< H_f(0,0)h, h > \leq 0\,,$$

причем минимум первой формы и максимум второй достигается на векторах $h = (0, h^2)$. Теорема 4.2 здесь неприменима, но поскольку $f(x,y) = (x^2-1)^2 + y^4 - 1$, то очевидно, что в точках $(\pm 1, 0)$ функция f имеет локальный минимум, а в точке $(0,0)$ у нее нет ни локального минимума, ни локального максимума.

5 Касательные пространства. критические точки плоских кривых

Определение 5.1 Пусть вектор-функция $f \in C^1(X, \mathbb{R}^m)$, $X \subset \mathbb{R}^n$ — область, причем $n \geq m$. Пусть вектор $c \in \operatorname{im} f$. Множество уровня c вектор-функции f называется *поверхностью размерности* $n-m$, если

$$\operatorname{rank} J_f(x) = m \ \ \forall x \in f^{-1}(c)\,.$$

В дальнейшем, не теряя общности, мы будем рассматривать только множества уровня $\mathbb{O}$, совершая, если это необходимо, параллельный перенос на вектор $-c$ (т. е. рассматривая вместо функции f функцию $\tilde{f} = f - c$).

Пример 5.1 Множеством уровня $\mathbb{O}$, вектор функции

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2-1 \\ x+y+z \end{pmatrix}\,; \;\; f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,,$$

будет окружность

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\,,\; x+y+z=0\}$$

в пространстве $\mathbb{R}^3$, т. е. одномерная поверхность, поскольку

$$\operatorname{rank} J_f(x,y,z) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2\,,\;\; (x,y,z) \neq (0,0,0)\,.$$

Поясним теперь геометрический смысл данного определения. Для этого рассмотрим сначала поверхность уровня 0 функции $f \in C^1(X,\mathbb{R})$, где $X \subset \mathbb{R}^n$, т. е. множество точек $\mathcal{M} = \{x \in X : f(x) = 0\}$. Фиксируем некоторую точку $x_0 \in \mathcal{M}$ и рассмотрим гладкую вектор-функцию $\gamma : (-1,1) \to \mathcal{M}$ такую, что $\gamma(0) = x_0$. В координатной записи вектор-функция γ имеет вид

$$\gamma(t) = \operatorname{col}(\gamma^1(t), \gamma^2(t), \ldots, \gamma^n(t))\,.$$

Пользуясь механической аналогией, можно сказать, что вектор-функция γ “рисует” траекторию Γ точки, “ползущей” по поверхности $\mathcal{M}$ с течением времени $t \in (-1,1)$. Развивая эту аналогию дальше, заметим, что производная (скорость точки)

$$\gamma(t) = \operatorname{col}(\dot\gamma^1(t), \dot\gamma^2(t), \ldots, \dot\gamma^n(t))$$

является *касательным вектором* к траектории Γ в точке $(\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t))$.

Поскольку $\Gamma \subset \mathcal{M}$, то это означает, что $f(\gamma(t)) = 0$ $\forall t \in (-1,1)$. Продифференцировав последнее равенство по t, получим в точке x_0

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial \gamma^1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^2}\frac{\partial \gamma^2}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}\frac{\partial \gamma^n}{\partial t} =< \nabla f(x_0), \dot\gamma(0) >= 0\,.$$

Если потребовать, чтобы траектория Γ “проходила точку x_0” с ненулевой скоростью (т. е. $\dot\gamma(0) \neq \mathbb{O}$), то последнее равенство окажется возможным лишь в случае $\nabla f(x_0) \perp \dot\gamma(0)$.

Определение 5.2 Множество всех векторов, каждый из которых является касательным вектором некоторой гладкой траектории, проходящей через точку x_0 поверхности $\mathcal{M}$ вектор-функции f, называется *касательным пространством* к поверхности $\mathcal{M}$ в точке x_0 и обозначается символом $T_{x_0}\mathcal{M}$.

В силу предыдущих рассуждений градиент $\nabla f(x)$ оказывается перпендикулярным ко всем векторам из $T_{x_0}\mathcal{M}$. В силу этого справедлива

Теорема 5.1 *Пусть* $f \in C^1(X, \mathbb{R})$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{M} = f^{-1}(0)$ — *поверхность. Тогда* $T_{x_0}\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^n :< \nabla f(x_0), x - x_0 >= 0\}$.

Теперь вернемся к вектор-функции $f : X \to \mathbb{R}^n$, $X \subset \mathbb{R}^m$ и $m \geq n$. Ее поверхность уровня $\mathbb{O}$ можно рассматривать в геометрическом смысле как множество точек $x \in \mathbb{R}^m$ лежащих на пересечении $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathcal{M}^i$ поверхностей $\mathcal{M}^i$ уровня 0 компонент f^i. В алгебраическом смысле поверхность состоит из корней системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{c} f^1(x^1, x^2, \ldots, x^m) = 0\,; \\ f^2(x^1, x^2, \ldots, x^m) = 0\,; \\ \ldots \\ f^n(x^1, x^2, \ldots, x^m) = 0\,. \end{array}\right.$$

Условие $\operatorname{rank} J_f(x) = n \ \forall x \in \mathcal{M}$, которое в координатном виде имеет вид

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \nabla f^1(x) \\ \nabla f^2(x) \\ \ldots \\ \nabla f^n(x) \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^m}(x) \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial x^1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f^2}{\partial x^m}(x) \\ . & . & . \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^m}(x) \end{pmatrix} = n\,,$$

означает, что градиенты всех компонент в каждой точке $x \in \mathcal{M}$ — линейно-независимые векторы, поэтому каждый вектор из $T_{x_0}\mathcal{M}$ должен быть перпендикулярен градиенту каждой компоненты. Отсюда и из теоремы 5.1 следует

Теорема 5.2 *Пусть* $f \in C^1(X, \mathbb{R}^m)$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq m$; $\mathcal{M} = f^{-1}(\mathbb{O})$ *— поверхность. Тогда* $T_{x_0}\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^n : J_f(x_0)(x - x_0) = \mathbb{O}\}$.

Итак, поверхность в $\mathbb{R}^n$, определяемая гладкой вектор-функцией $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ и $n \geq m$, при условии $\operatorname{rank} J_f(x) = m$ $\forall x \in f^{-1}(\mathbb{O})$ — это достаточно "гладкий" объект, к каждой точке которого может быть построено касательное пространство $T_x f^{-1}(\mathbb{O})$. Чтобы представить себе, какие нас ждут неприятности в случае нарушения условия $\operatorname{rank} J_f = m$ $\forall x \in f^{-1}(\mathbb{O})$, рассмотрим функцию $f \in C^2(X, \mathbb{R})$, где $X \subset \mathbb{R}^2$, поэтому поверхностями уровня таких функций будут кривые, лежащие в плоскости, т. е. *плоские кривые*.

Перейдем к традиционным обозначениям координат (x, y) плоскости $\mathbb{R}^2$ и напомним, что точка (x_0, y_0) называется *критической точкой* функции f, если $\nabla f(x_0) = (0, 0)$. Предположим теперь, что критическая точка (x_0, y_0) лежит на кривой $f(x, y) = 0$, т. е. $f(x_0, y_0) = 0$. Предположим еще, что матрица Гессе $H_f(x_0, y_0)$ не равна нулевой матрице.

Пользуясь формулой Тейлора, запишем, что

$$2f(x, y) = (x - x_0)^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0) f_{xy}(x_0, y_0) +$$

$$+ (y - y_0)^2 f_{yy}(x_0, y_0) + o((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)\,,$$

где

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,.$$

Любую прямую, проходящую через точку (x_0, y_0), можно задать параметрическим уравнением вида

$$x - x_0 = at\,, \quad y - y_0 = bt\,,$$

где (a, b) — координаты направляющего вектора. Найдем точки пересечения этой прямой с кривой $f(x, y) = 0$.

$$t^2(a^2 f_{xx} + 2ab f_{xy} + b^2 f_{yy} + o(1)) = 0\,.$$

Одно решение $t = 0$ видно сразу; оно дает точку пересечения (x_0, y_0), которая была известна заранее. Для нахождения других точек рассмотрим уравнение

$$a^2 f_{xx} + 2ab f_{xy} + b^2 f_{yy} + o(1) = 0\,.$$

Предположим, что оно имеет решение (x, y). Устремляя (x, y) к точке (x_0, y_0), из секущей прямой мы получим касательную прямую в точке (x_0, y_0). Заметим, что при $(x, y) \to (x_0, y_0)$ $o(1) \to 0$; стало быть, координаты направляющего вектора (a_0, b_0) касательной должны удовлетворять уравнению

$$a_0^2 f_{xx} + 2a_0 b_0 f_{xy} + b_0^2 f_{yy} + o(1)\,. \tag{5.3}$$

При нахождении решений этого уравнения возможны три случая:

1. Дискриминант уравнения (5.3) имеет в точке (x_0, y_0) положительное значение, т. е.

$$f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy} > 0\,.$$

В этом случае существует *две различные касательные*. Кривая имеет *узловую точку*.

Пример 5.2 *Лимниската Бернулли*: она определяется как множество точек на плоскости, для которых произведение расстояний r_1 и r_2 от точек $(a, 0)$ и $(-a, 0)$ равно a^2. Кривая задается уравнением

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0\,.$$

Точка $(0, 0)$ — узловая точка.

2. В точке (x_0, y_0) дискриминант отрицателен:

$$f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy} < 0\,.$$

В этом случае *касательных нет*. Точка (x_0, y_0) является *изолированной точкой* кривой.

Пример 5.3 Кривая $(x^2-a^2)^2+(y^2-b^2)^2 = a^4+b^4$, где $a, b > 0$ имеет изолированную точку в начале координат. Кроме этой точки никакая другая точка прямоугольника $(-a\sqrt{2}, a\sqrt{2}) \times (-b\sqrt{2}, b\sqrt{2})$ не лежит на этой кривой.

3. В точке (x_0, y_0) дискриминант обращается в нуль:

$$f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} = 0\,.$$

Тогда точка (x_0, y_0) может быть *точкой возврата* (имеются две совпадающие касательные), как точка $(0,0)$ у $y = x^{\frac{2}{3}}$, либо *изолированной точкой*, как точка $(0,0)$ у кривой $y^2 = x^4(x-1)$. Возможна также точка самоприкосновения, когда через точку (x_0, y_0) проходят две ветви кривой, причем каждая ветвь порознь не имеет никакой особенности, как например точка $(0,0)$ для кривой

$$0 = y^2 + yx^2 - 2x^4 = (y - x^2)(y + 2x^2)\,.$$

Незатейливый разбор особенностей плоских кривых должен убедить многих (если не всех) в преимуществах условия

$$\operatorname{rank} J_f(x) = n \ \forall x \in f^{-1}(c)$$

при рассмотрении поверхностей. Мы продолжим рассмотрение вопроса о поверхностях, но будем рассматривать их с другой стороны.

Определение 5.3 Пусть вектор-функция $f \in C^1(X, \mathbb{R}^n)$, где $X \subset \mathbb{R}^m$ — область, причем $n \geq m$. Образ $f[X]$ будем называть *поверхностью размерности* m, если $f : X \to f[X]$ биективна и

$$\operatorname{rank} J_f(x) = m \quad \forall x \in X\,.$$

Рассмотрим

Пример 5.4 Вектор-функция

$$f(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} \cos x^2 \cos x^1 \\ \sin x^2 \cos x^1 \\ \sin x^1 \end{pmatrix}$$

биективно отображает прчмоугольник $(0, \dfrac{\pi}{2}) \times (0, \pi)$ на четверть сферы $S_1(0, 0, 0)$, причем

$$\operatorname{rank} J_f(x) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} -\cos x^2 \sin x^1 & -\sin x^2 \cos x^1 \\ -\sin x^2 \sin x^1 & \cos x^2 \sin x^1 \\ \cos x^1 & 0 \end{pmatrix} = 2\,.$$

Попытаемся геометрически осмыслить условие

$$\operatorname{rank} J_f(x) = m \ \forall x \in X\,.$$

Пусть $\mathcal{M} = f[X]$ — поверхность, построеная согласно определению 5.3. Фиксируем точку $x_0 \in X$ и точку $y_0 = f(x_0) \in \mathcal{M}$. Предположим, что отрезок I^1_δ с концами $(x^1_0 - \delta, x^2_0, \ldots, x^n_0)$ и $(x^1_0 + \delta, x^2_0, \ldots, x^n_0)$ целиком лежит в X. Подействуем на I^1_δ вектор-функцией f. Его образом будет некоторая кривая Γ_1, лежащая в поверхности $\mathcal{M}$ и содержащая точку y_0. Нетрудно найти касательный вектор к Γ_1 в точке y_0:

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) = \operatorname{col}\left(\frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0), \frac{\partial f^2}{\partial x^1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f^n}{\partial x^1}(x_0)\right)\,.$$

Теперь предположим, что отрезок I^2_δ с концами $(x^1_0, x^2_0 - \delta, \ldots, x^n_0)$ и $(x^1_0, x^2_0 + \delta, x^3_0, \ldots, x^n_0)$ тоже лежит в X. Его образом будет кривая Γ_2, лежащая в $\mathcal{M}$ и проходящая через y_0. Найдем касательный вектор к Γ_2 в точке y_0:

$$\frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0) = \operatorname{col}\left(\frac{\partial f^1}{\partial x^2}(x_0), \frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x_0), \ldots, \frac{\partial f^n}{\partial x^2}(x_0)\right)\,.$$

Проделав эту процедуру со всеми переменными $x^1, x^2, \ldots, x^m$, мы получим m касательных векторов в точке y_0

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = \operatorname{col}\left(\frac{\partial f^1}{\partial x^i}(x_0), \frac{\partial f^2}{\partial x^i}(x_0), \ldots, \frac{\partial f^n}{\partial x^i}(x_0)\right)\,, \ i = 1, \ldots, m\,.$$

Нетрудно заметить, что условие

$$\operatorname{rank} J_f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0)\right) = m$$

означает, что все эти касательные векторы являются *линейно независимыми.* Их линейная оболочка образует *касательное пространство* $T_{y_0}\mathcal{M}$. Таким образом, доказана

Теорема 5.3 *Пусть* $f \in C^1(X, \mathbb{R}^n)$, *область* $X \subset \mathbb{R}^m$, $n > m$ *и* $\mathcal{M} = f[X]$ *— поверхность,* $y_0 \in \mathcal{M}$. *Тогда*

$$T_{y_0}\mathcal{M} = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists \alpha_i \in \mathbb{R}\ (y - y_0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0))\}\,.$$

На первый взгляд может показаться, что определения 5.1 и **??** задают разные типы поверхностей в $\mathbb{R}^n$. На самом же деле между ними существует глубокая взаимосвязь, которая проясняется посредством *теоремы о неявной функции.*

6 Ориентированные поверхности

Напомним прежде всего, что переход от одного базиса $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ пространства $\mathbb{R}^n$ к другому $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ осуществляется посредством квадратной матрицы $A = \|a_{ij}\|$ порядка n, возникающей из разложения

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i\,.$$

Определитель $\det A$ всегда отличен от нуля, и все базисы пространства $\mathbb{R}^n$ разбиваются на два класса по следующему правилу: базисы $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ лежат в одном классе, если $\det A > 0$, и в разных классах, если $\det A < 0$. Эти классы называются *классами ориентации* пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 6.1 *Ориентированное пространство* $\mathbb{R}^n$ — это пространство $\mathbb{R}^n$ вместе с выделенным и фиксированным классом ориентации.

Чтобы указать класс ориентации, достаточно предъявить любой его базис, поэтому можно сказать, что ориентированное пространство — это пространство $\mathbb{R}^n$ вместе с фиксированным в нем базисом.

Пример 6.1 В пространстве $\mathbb{R}$ рассмотрим два базиса $e = (1)$ и $e' = (-1)$. Эти базисы лежат в разных классах ориентации пространства $\mathbb{R}$, поскольку матрица перехода от одного к другому есть $A = \|-1\|$, и ее определитель $\det \|A\| = -1 < 0$. Выбор базиса e задает в $\mathbb{R}$ ориентацию, называемую еще *естественной*, *стандартной ориентацией* или *ориентацией по возрастанию.*

Пример 6.2 В пространстве $\mathbb{R}^2$ рассмотрим два базиса $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ и $\{e_1' = (-1,0), e_2' = (0,1)\}$. Матрица перехода A и ее определитель равны соответственно

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \det A = -1 < 0\,.$$

Поэтому эти базисы лежат в разных классах ориентации. Двум этим базисам соответствуют разные системы координат. Первая из них соответствует базису, задающему *стандартную* или *естественную ориентацию* в $\mathbb{R}^2$. Обратим внимание, что в системе I_2 движение от положительног направления оси Ox к положительному направлению оси Oy происходит против часовой стрелки, а в системе I_2' — наоборот по часовой стрелке.

Пример 6.3 В пространстве $\mathbb{R}^3$ два базиса $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ и $\{e_1' = (-1,0,0), e_2' = (0,1,0), e_3' = (0,0,1)\}$ тоже лежат в разных классах ориентации, поскольку определитель матрицы перехода

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

равен $-1 < 0$. Двум различным базисам соответствуют различные системы координат. Первая из них соответствует базису, задающему *естественную*, *стандартную* или, еще говорят, *правую ориентацию* в $\mathbb{R}^3$. Последний термин отражает тот факт, что при повороте от положительного направления оси Ox к положительному направлению оси Oy положительное направление оси Oz совпадает с направлением движения буравчика, имеющего правую нарезку. В системе I_3' при аналогичном движении от оси Ox к оси Oy положительное направление оси Oz совпадает с направлением движения левого буравчика.

Теперь пусть Ω — область, лежащая в ориентированном пространстве $\mathbb{R}^k_t$. Зададим в каждой точке $t \in \Omega$ базис $\{e_1(t), \dots, e_k(t)\}$.

Определение 6.2 Область $\Omega \subset \mathbb{R}^k_t$ называется *ориентированной*, если базисы $\{e_1(t), \dots, e_k(t)\}$ $\forall t \in \Omega$ лежат в одном классе ориентации.

Для ориентации области $\Omega \subset \mathbb{R}^k_t$ достаточно "разнести" по всем точкам области Ω параллельно самому себе базис $\{e_1, \dots, e_k\}$ исходного пространства $\mathbb{R}^k_t$.

Рассмотрим теперь диффеоморфизм $\varphi : \Omega \to S$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^k_t$ и поверхности $S \subset \mathbb{R}^n_x$. Возьмем точку $t \in \Omega$, *касательное пространство* $T_t\Omega$ — это просто пространство $\mathbb{R}^k_t$ "сдвинутое" на вектор t. Производная φ'_t есть матрица Якоби ранга k, поэтому она отображает касательное пространство $T_t\Omega$ в k-мерное пространство T_xS, $x = \varphi(t)$, по формуле

$$T_t\Omega \ni e \to \xi = \varphi'_t e \in T_xS\,. \tag{6.4}$$

Пространство T_xS называется *касательным пространством* к поверхности S в точке x.

Итак, посредством (6.4) из базиса $\{e_1(t), \dots, e_k(t)\}$ в $T_t\Omega$ получается базис $\{\xi_1(x), \dots, \xi_k(x)\}$, $\xi_i(x) = \varphi'_t e_i(t)$, $x = \varphi(t)$ $i = 1, \dots, k$. Поскольку $\varphi \in C^1(\Omega; S)$, то вектор-функция $\xi(x) = \xi(\varphi(t)) = \varphi'_t e(t)$ $\forall t \in \Omega$ непрерывна на S. Таким образом, диффеоморфизм φ задает на поверхности S непрерывную матриц-функцию φ'_t, которая каждому касательному пространству $T_t\Omega$ ставит в соответствие касательное пространство T_xS, $x = \varphi(t)$.

Определение 6.3 Пусть $S \subset \mathbb{R}^n_x$ — поверхность, $\{\xi_1(x),\ldots,\xi_k(x)\}$ — некоторый базис в касательном пространстве T_xS. Поверхность S называется *ориентированной*, если все базисы $\{\xi_1(x),\ldots,\xi_k(x)\}$ $\forall x \in S$ лежат в одном классе ориентации.

Важный случай задания ориентации поверхности S возникает в случае $k = n-1$. Пусть пространство $\mathbb{R}^n_x$ ориентировано базисом $\{e_1,\ldots,e_n\}$, а $(n-1)$-мерная поверхность $S \subset \mathbb{R}^n_x$ ориентирована классом базисов $\{\xi_1(x),\ldots,\xi_{n-1}(x)\}$. Построим в каждой точке $x \in S$ единичный вектор $\nu(x) \perp T_xS$, который называется *нормалью* к поверхности S. Поверхность $S \subset \mathbb{R}^n_x$ размерности $n-1$ ориентированная классом базисов $\{\xi_1(x),\ldots,\xi_{n-1}(x)\}$, $x \in S$ называется *ориентированная нормалью* $\nu(x)$, если базисы $\{\xi_1(x),\ldots,\xi_{n-1}(x),\nu(x)\}$ $\forall x \in S$ и $\{e_1,\ldots,e_n\}$ лежат в одном классе ориентации.

Действительно, если вектор $\nu(x)$ — нормаль поверхности S размерности $n-1$, то и вектор $-\nu(x)$ тоже будет нормалью к поверхности S в точке x. Матрица A перехода от базиса $\{\xi_1(x),\ldots,\xi_k(x),\nu(x)\}$ к базису $\{\xi_1(x),\ldots,\xi_k(x),-\nu(x)\}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\det A = -1$, то выбор нормали к $(n-1)$-мерной поверхности $S \subset \mathbb{R}^n_x$ задает одну из двух возможных ориентаций этой поверхности.

Определение 6.4 Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^k_t$ ориентирована базисом $\{e_1,\ldots,e_k\}$, а k-мерная поверхность $S \subset \mathbb{R}^n_x$ ориентированная классом базисов $\{\xi_1(x),\ldots,\xi_k(x)\}$. Диффеоморфизм $\varphi : \Omega \to S$ называется *сохраняющим ориентацию* поверхности S, если базисы $\{\xi_1(x),\ldots,\xi_k(x)\}$ и $\{\varphi'_t e_1,\ldots,\varphi'_t e_k\}$, $x = \varphi(t)$ лежат в одном классе ориентации, и *не сохраняющим ориентацию S* в противном случае.

Поскольку любой диффеоморфизм $\varphi : \Omega \to S$ задает непрерывную матриц-функцию φ_t', а сама поверхность S связна, то сохранение или несохранение ориентации поверхности S диффеоморфизмом φ вполне определится, если хотя бы в одной точке $x \in S$ будет указан базис, ориентирующий S. Если такой ориентирующий базис в некоторой точке $x_0 \in S$ задан, и взят какой-либо диффеоморфизм $\varphi : \Omega \to S$, то построив в $T_{x_0}S$ базис, индуцированный этим диффеоморфизмом, сравниваем его с заданным в $T_{x_0}S$ ориентирующим базисом. Если они лежат в одном классе ориентации, то диффеоморфизм φ сохраняет ориентацию S, в противном случае — не сохраняет.

Пример 6.4 Пусть в $\mathbb{R}^2$ задана поверхность

$$S = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1\,,\ x^i > 0\,,\ i = 1, 2\}\,.$$

Ориентируем ее направлением движения против часовой стрелки. Рассмотрим диффеоморфизмы

$$\varphi(t) = \mathrm{col}\left(\cos\frac{\pi}{2}t, \sin\frac{\pi}{2}t\right)\,,\ \ \psi(t) = \mathrm{col}(t, \sqrt{1-t^2})\,,$$

отображающие интервал $(0, 1)$ в четверть единичной окружности S. Диффеоморфизм φ сохраняет ориентацию S, поскольку в точке $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in S$ имеем

$$\varphi_{\frac{1}{2}}(1) = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{col}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,,\ \ \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \mathrm{col}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,.$$

Диффеоморфизм ψ не сохраняет ориентацию S, поскольку в точке $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in S$ имеем

$$\psi_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1) = \mathrm{col}(1, -1)\,,\ \ \psi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \mathrm{col}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,.$$

Пример 6.5 Рассмотрим в качестве поверхности S восьмушку единичной сферы

$$S = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1, x^i > 0, i = 1, 2, 3\}\,,$$

ориентированную внешней (по отношению ко всей сфере) нормалью. Диффеоморфизм

$$\varphi(t^1,t^2) = \mathrm{col}(\cos\frac{\pi}{2}t^1\cos\frac{\pi}{2}t^2, \sin\frac{\pi}{2}t^1\cos\frac{\pi}{2}t^2, \sin\frac{\pi}{2}t^2)\,,$$

который отображает область $\Omega = (0,1)\times(0,1)$ на S, сохраняет ориентацию, поскольку в точке

$$x = \mathrm{col}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in S$$

имеем

$$\varphi'_{\left(\frac12,\frac12\right)} = \frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} -\frac12 & -\frac12 \\ \frac12 & -\frac12 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\,,\ \varphi\left(\frac12,\frac12\right) = \mathrm{col}\left(\frac12,\frac12,\frac{1}{\sqrt2}\right)\,.$$

Поэтому базис, индуцированный диффеоморфизмом, имеет вид

$$\left\{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{col}\left(-\frac12,\frac12,0\right)\,,\ \frac{\pi}{2}\,\mathrm{col}\left(-\frac12,-\frac12,\frac{1}{\sqrt2}\right)\right\}\,.$$

Поскольку в точке x нормаль $\nu(x) = \mathrm{col}\left(\frac12,\frac12,\frac{1}{\sqrt2}\right)$, то матрица перехода от базиса

$$\{\mathrm{col}(1,0,0),\mathrm{col}(0,1,0),\mathrm{col}(0,0,1)\}$$

к базису

$$\left\{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{col}\left(-\frac12,\frac12,0\right)\,,\ \frac{\pi}{2}\,\mathrm{col}\left(-\frac12,-\frac12,\frac{1}{\sqrt2}\right)\,,\ \mathrm{col}\left(\frac12,\frac12,\frac{1}{\sqrt2}\right)\right\}$$

имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{\pi}{4} & -\dfrac{\pi}{4} & \dfrac12 \\ \dfrac{\pi}{4} & -\dfrac{\pi}{4} & \dfrac12 \\ 0 & \dfrac{\pi}{2\sqrt2} & \dfrac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\,,\ \det A = \frac{\pi^2}{4\sqrt2} > 0\,.$$

7 Необходимый признак условного экстремума

Одним из наиболее ярких и популярных достижений многомерного анализа являются предлагаемые им рецепты отыскания экстремумов функций. Мы уже умеем находить локальные экстремумы функций многих переменных, однако и с теоретической и с практической точек зрения более интересным является условный экстремум.

Постановка задачи. Пусть нам требуется найти экстремум функции

$$y = f(x^1, \dots, x^n) \tag{7.5}$$

n переменных при условии, что эти переменные удовлетворяют системе из $m \leq n$ уравнений

$$\begin{cases} \varphi^1(x^1, \dots, x^n) = 0\,; \\ \varphi^2(x^1, \dots, x^n) = 0\,; \\ \qquad \dots \\ \varphi^m(x^1, \dots, x^n) = 0\,. \end{cases} \tag{7.6}$$

Пусть в некоторой окрестности $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ выполнено следующее:

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial x^1} & \dots & \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial x^n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \varphi^m}{\partial x^1} & \dots & \dfrac{\partial \varphi^m}{\partial x^n} \end{pmatrix} = m\,. \tag{7.7}$$

Тогда в некоторой окрестности O_{x_0} любой точки $x_0 \in \Omega$ система (7.6) с точностью до переобозначений переменных $x^1, \dots, x^n$ приобретет вид

$$\begin{cases} x^1 = \psi^1(x^{m+1}, \dots, x^n)\,; \\ x^2 = \psi^2(x^{m+1}, \dots, x^n)\,; \\ \qquad \dots \\ x^m = \psi^m(x^{m+1}, \dots, x^n) \end{cases} \tag{7.8}$$

в силу теоремы о неявной функции.

Теперь, если функция f имеет в точке $x_0 \in \Omega$ условный экстремум, то это в точности означает, что функция

$$F(x^{m+1}, \dots, x^n) =$$

$$= f(\psi^1(x^{m+1}, \ldots, x^n), \ldots, \psi^m(x^{m+1}, \ldots, x^n), x^{m+1}, \ldots, x^n)$$

имеет локальный экстремум в точке $(x_0^{m+1}, \ldots, x_0^n)$. Если потребовать непрерывную дифференцируемость функций f,φ^1,$\ldots, \varphi^m$ в области Ω, то в силу необходимого условия локального экстремума имеем, что

$$\frac{\partial F}{\partial x^k}(x_0^{m+1}, \ldots, x_0^n) = 0\,,\ k = m+1, \ldots, n\,. \tag{7.9}$$

Теорема 7.1 *Пусть* $f, \varphi^1, \ldots, \varphi^m \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, *точка* $x_0 \in \Omega$ *удовлетворяет системе (7.6) и в этой точке выполнено (7.7). Если точка* x_0 *является точкой условного экстремума функции* f, *то* $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ *такие, что*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i}(x_0) = 0\,,\ i = 1, \ldots, n\,.$$

$\circ$ Поскольку точка $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^m, x_0^{m+1}, \ldots, x_0^n)$ — точка условного экстремума функции f, то в силу (7.9) имеем

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x^k}(x_0^{m+1}, \ldots, x_0^n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \frac{\partial \psi^i}{\partial x^k}(x_0^{m+1}, \ldots, x_0^n) + \frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0)\,,\ k = m+1, \ldots, n\,.$$

Пусть $h^{m+1}, \ldots, h^n$ — произвольные числа, тогда в точке $(x_0^{m+1}, \ldots, x_0^n)$ имеем

$$0 = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x^k} h^k = \sum_{k=m+1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial \psi^i}{\partial x^k} + \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) h^k =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i} \left(\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\partial \psi^i}{\partial x^k} h^k \right) + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k} h^k = < \nabla f(x_0), \tilde{h} >\,, \tag{7.10}$$

где

$$\tilde{h} = \mathrm{col} \left(\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\partial \psi^1}{\partial x^k} h^k, \ldots, \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\partial \psi^m}{\partial x^k} h^k, h^{m+1}, \ldots, h^n \right)\,.$$

Далее, подставляя (7.8) в (7.6), получим тождества

$$\begin{cases} \varphi^1(\psi^1(x^{m+1},\dots,x^n),\dots,\psi^m(x^{m+1},\dots,x^n),x^{m+1},\dots,x^n)\equiv 0\,; \\ \varphi^2(\psi^1(x^{m+1},\dots,x^n),\dots,\psi^m(x^{m+1},\dots,x^n),x^{m+1},\dots,x^n)\equiv 0\,; \\ \dots \\ \varphi^m(\psi^1(x^{m+1},\dots,x^n),\dots,\psi^m(x^{m+1},\dots,x^n),x^{m+1},\dots,x^n)\equiv 0 \end{cases} \tag{7.11}$$

в окрестности O_{x_0}. Продифференцировав тождества (7.11), получим

$$\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^k}(x_0)\equiv 0\,,\ k=1,\dots,n\,,\ i=1,\dots,m\,.$$

Отсюда для любого вектора h, в том числе и для $\tilde h$, имеем

$$<\nabla\varphi^i(x_0),\tilde h>=0\,,\ i=1,\dots,m\,. \tag{7.12}$$

Умножив равенства (7.12) на произвольные числа $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ и сложив их с равенством (7.10), получим

$$\begin{gathered} <\nabla f(x_0),\tilde h>+\sum_{j=1}^m\lambda_j<\nabla\varphi^i(x_0),\tilde h>= \\ =\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)+\sum_{j=1}^m\lambda_j\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^i}(x_0)\right)\tilde h^i=0\,. \end{gathered} \tag{7.13}$$

Подберем теперь числа $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ так, чтобы

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)+\sum_{j=1}^m\lambda_j\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^i}(x_0)=0\,,\ i=1,\dots,m\,. \tag{7.14}$$

Это всегда возможно, поскольку в системе (7.14) из m уравнений определитель

$$\det\left\|\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^i}(x_0)\right\|_{i,j=1}^m\neq 0$$

в силу условия (7.7).

Подобрав числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ вернемся к равенству (7.13).

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^i}(x_0)\right)\tilde h^i = \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^i}(x_0)\right)\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\partial\psi^i}{\partial x^k}h^k+ \\
&+ \sum_{k=m+1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^i}(x_0)\right)h^i = \\
&= \sum_{k=m+1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^i}(x_0)\right)h^i\,.
\end{aligned}
\tag{7.15}
$$

Поскольку равенство (7.15) должно выполняться для любых чисел $h^{m+1}, \dots, h^n$, то отсюда следует, что

$$
\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^i}(x_0)=0\,,\ i=m+1,\dots,n\,,
$$

что в купе с (7.14) дает утверждение теоремы. •

Определение 7.1 Функция $\Phi : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ вида

$$
\Phi(x,\lambda)=f(x)+\lambda_1\varphi^1(x)+\ldots+\lambda_m\varphi^m(x)
$$

называется *функцией Лагранжа* задачи (7.5), (7.6). Точку $(x_0, \lambda_0) \in \Omega\times\mathbb{R}^m$ назовем *критической точкой* функции Лагранжа $\Phi(x, \lambda)$, если

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}(x_0,\lambda_0)&=0\,,\ i=1,\dots,n\,,\\
\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda^j}(x_0,\lambda_0)&=0\,,\ j=1,\dots,m\,.
\end{aligned}
$$

С использованием нового термина теорему 7.1 можно сформулировать так: пусть $x_0 \in \Omega$ — точка условного экстремума функции f и выполнено (7.7). Тогда существует $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ такое, что точка (x_0, λ_0) является критической точкой функции Лагранжа $\Phi(x, \lambda)$.

Заметим еще, что

$$
\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda^j}(x_0,\lambda_0)\equiv\varphi^j(x_0)=0\,,\ j=1,\dots,m\,.
$$

8 Достаточный признак условного экстремума

Теорема 8.1 *Пусть* $f, \varphi^1, \ldots, \varphi^m \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, *точка* $(x_0, \lambda_0) \in \Omega \times \mathbb{R}^m$ *является критической точкой функции Лагранжа*

$$\Phi(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda^i \varphi^i(x)\,,$$

причем точка $x_0 \in \Omega$ *удовлетворяет системе уравнений*

$$\left\{ \begin{array}{c} \varphi^1(x^1, \ldots, x^n) = 0\,; \\ \varphi^2(x^1, \ldots, x^n) = 0\,; \\ \cdots \\ \varphi^m(x^1, \ldots, x^n) = 0\,, \end{array} \right. \tag{8.16}$$

и в этой точке справедливо неравенство

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial x^m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \varphi^m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi^m}{\partial x^m} \end{pmatrix} (x_0) \neq 0, . \tag{8.17}$$

Тогда

(i) если квадратичная форма $< H_\Phi(x_0, \lambda_0)h, h >$ *положительно определена, то* x_0 *— точка условного минимума;*

(ii) если квадратичная форма $< H_\Phi(x_0, \lambda_0)h, h >$ *отрицательно определена, то* x_0 *— точка условного максимума;*

(iii) если квадратичная форма $< H_\Phi(x_0, \lambda_0)h, h >$ *может принимать значения разных знаков, то* x_0 *не является точкой условного экстремума,*

причем вектор h *должен принадлежать множеству*

$$\mathcal{L} = \{h \in \mathbb{R}^n :< \nabla \varphi^i(x_0), h >= 0\,,\ i = 1, \ldots, m\}\,,$$

а матрица Гессе имеет вид

$$H_\Phi(x_0, \lambda_0) = \left\| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j}(x_0, \lambda_0) \right\|_{i,j=1}^{n}\,.$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, сделаем ряд замечаний.

Замечание 8.1 Условие (8.17) с точностью до переобозначения переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n$ эквивалентно условию (7.7).

Замечание 8.2 Если матрица Гессе $H_\Phi(x_0, \lambda_0)$ положительно (отрицательно) определена, то в точке x_0 — условный минимум (условный максимум), поскольку квадратичная форма $< H_\Phi(x_0, \lambda_0)h, h >$ будет принимать только положительные (отрицательные) значения $\forall h \in \mathbb{R}^n$ $(h \neq \mathbb{O})$, в том числе $\forall h \in \mathcal{L}$ $(h \neq \mathbb{O})$. Что касается знаконеопределенности матрицы Гессе $H_\Phi(x_0, \lambda_0)$, то по ней нельзя судить о знакоопределенности квадратичной формы $< H_\Phi(x_0, \lambda_0)h, h >$, $h \in \mathcal{L}$, как показывает следующий

Пример 8.1 Пусть

$$H_\Phi(x_0, \lambda_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L} = \left\{ h \in \mathbb{R}^2 : \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \end{pmatrix} \right\rangle \equiv h^1 + h^2 = 0 \right\}.$$

Матрица $H_\Phi(x_0, \lambda_0)$ знакоопределена, поскольку квадратичная форма

$$< H_\Phi(x_0, \lambda_0)h, h >= \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= 2(h^1)^2 - (h^2)^2$$

принимает положительные значения на векторах $h = \mathrm{col}(h^1, o)$ и отрицательные значения на векторах $h = \mathrm{col}(0, h^2)$, $h^i \neq 0$, $i = 1, 2$. Однако $\forall h \in \mathcal{L}$, $h = \mathrm{col}(h^1, -h^1)$ имеем

$$< H_\Phi(x_0, \lambda_0)h, h >= 2(h^1)^2 - (h^1)^2 = (h^1)^2 > 0\,, \;\; h^1 \neq 0\,.$$

Замечание 8.3 Множество $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ — линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$, касательное к поверхности (8.16) в точке x_0.

○ Из необходимого признака условного экстремума (теорема 7.1) следует:

$\tilde{x}_0$ — критическая точка $F(x) \Rightarrow (x_0, \lambda_0)$ — критическая точка $\Phi(x, \lambda)$, где $\tilde{x}_0 = (x_0^{m+1}, \dots, x_0^n)$, $\lambda_0 = (\lambda_0^1, \dots, \lambda_0^m) \in \mathbb{R}^m$, а $F(\tilde{x}) \equiv f(\psi^1(x^{m+1}, \dots, x^n), \psi^2(x^{m+1}, \dots, x^n), \dots, \psi^m(x^{m+1}, \dots, x^n), x^{m+1}, \dots, x^n)$, $\tilde{x} = (x^{m+1}, \dots, x^n)$, функции ψ^i, $i = 1, \dots, m$, взяты из (7.8).

Теперь докажем обратное утверждение:

(x_0, λ_0) — критическая точка $\Phi(x, \lambda) \Rightarrow \tilde{x}_0$ — критическая точка $F(\tilde{x})$.

Действительно,

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}(\tilde{x}_0) = \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial \psi^k}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)(x_0)\,, \;\; i = m+1, \dots, n$$

в силу теоремы о производной композиции дифференцируемых функций. Отсюда для произвольного вектора $\tilde{h} = (0, \dots, 0, h^{m+1}, \dots, h^n)$ имеем

$$< \nabla F(\tilde{x}_0), \tilde{h} >= \sum_{i=m+1}^n \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial \psi^k}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)(x_0) h^i =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^k} \left(\sum_{i=m+1}^n \frac{\partial \psi^k}{\partial x^i} h^i \right) + \sum_{i=m+1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k} h^i \right)(x_0) =$$

$$=< \nabla f(x_0), h >\,,$$

где

$$h = \operatorname{col}\left(\sum_{i=m+1}^n \frac{\partial \psi^1}{\partial x^i} h^i, \dots, \sum_{i=m+1}^n \frac{\partial \psi^m}{\partial x^i} h^i, h^{m+1}, \dots, h^n \right).$$

Зная, что в окрестности точки $\tilde{x}_0$ система (8.16) выполняется тождественно (после подстановки $x^i = \psi^i(\tilde{x})$, $i = 1, \dots, m$, из (7.8)), продифференцируем каждое ее уравнение и получим равенства $< \nabla \varphi^i(x_0), g >\equiv 0 \;\; \forall g \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$. Полагая в последних равенствах $y = h$, умножая их на λ_o^i, $i = 1, \dots, m$ и складывая, получим

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_0^i < \nabla\varphi^i(x_0), h >\equiv 0\,.$$

Отсюда получим

$$< \nabla f(x_0), h >=< \nabla f(x_0), h > + \sum_{i=1}^{m} \lambda_0^i < \nabla\varphi(x_0), h >=$$

$$< \nabla_x \Phi(x_0, \lambda_0), h >= 0\,,$$

поскольку (x_0, λ_0) — критическая точка функции Лагранжа. Но так, как $< \nabla f(x_0), h >=< \nabla F(\tilde{x}_0), \tilde{h} >$ и ввиду произвола вектора $\tilde{h}$, получаем, что $\nabla F(\tilde{x}_0) = \mathbb{O}$, т. е. $\tilde{x}_0$ — критическая точка функции F.

Мы уже говорили о том, что $\tilde{x}_0$ — критическая точка функции f точно тогда, когда $\tilde{x}_0$ — точка локального экстремума функции F. Поэтому, зная, что $F \in C^2(O_{\tilde{x}_0}, \mathbb{R})$, где $O_{\tilde{x}_0} \in \mathbb{R}^{n-m}$ — некоторая окрестность точки $\tilde{x}_0$, исследуем критическую точку $\tilde{x}_0$ на локальный экстремум. Найдем матрицу Гессе $H_F(\tilde{x}_0)$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^j \partial x^i}(\tilde{x}_0) = \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^k} \frac{\partial \psi^l}{\partial x^j} \frac{\partial \psi^k}{\partial x^j} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial^2 \psi^k}{\partial x^j \partial x^i} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \frac{\partial \psi^k}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) (x_0)\,,$$

где $i, j = m+1, \ldots, n$. Теперь возьмем произвольный вектор $\tilde{h} = (0, \ldots, 0, h^{m+1}, \ldots, h^n)$ и найдем выражение $< H_F(\tilde{x}_0 \tilde{h}, \tilde{h} >$, опуская знак суммы при повторяющихся индексах, $k, l = 1, \ldots, m$ и $i, j = m+1, \ldots, n$:

$$< H_F(\tilde{x}_0)\tilde{h}, \tilde{h} >= \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(\tilde{x}_0) h^i h^j =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \left(\frac{\partial \psi^k}{\partial x^i} \frac{\partial \psi^l}{\partial x^j} h^i h^j \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} \left(\frac{\partial \psi^k}{\partial x^k} h^i h^j \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} h^i h^j +$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial^2\psi^k}{\partial x^i\partial x^j}h^ih^j =< H_f(x_0)h, h > +\frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial^2\psi^k}{\partial x^i\partial x^j}h^ih^j\,,$$

где вектор

$$h = \mathrm{col}\left(\sum_{i=m+1}^{n}\frac{\partial\psi^1}{\partial x^i}h^i, \ldots, \sum_{i=m+1}^{n}\frac{\partial\psi^m}{\partial x^i}h^i, h^{m+1}, \ldots, h^n\right)$$

находится из системы уравнений

$$0 =< \nabla(x^k - \psi^k(\tilde{x}_0)), h >= h^k - \sum_{i=m+1}^{n}\frac{\partial\psi^k}{\partial x^i}h^i\,,\ k = 1, \ldots, m\,.$$

Поскольку в некоторой окрестности $O_{\tilde{x}_0}$ точки $\tilde{x}_0$ системы

$$\begin{cases} \varphi^1(x) = 0\,; \\ \varphi^2(x) = 0\,; \\ \quad\cdots \\ \varphi^m(x) = 0\,, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^1 - \psi^1(\tilde{x}) = 0\,; \\ x^2 - \psi^2(\tilde{x}) = 0\,; \\ \quad\cdots \\ x^m - \psi^m(\tilde{x}) = 0 \end{cases}$$

эквивалентны, то в силу теоремы о неявной функции имеем

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\psi^1}{\partial x^{m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial\psi^1}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\psi^m}{\partial x^{m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial\psi^m}{\partial x^n} \end{pmatrix} =$$

$$-\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi^1}{\partial x^m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial\varphi^m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi^m}{\partial x^m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi^1}{\partial x^{m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi^1}{\partial x^n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial\varphi^m}{\partial x^{m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi^m}{\partial x^n} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi^1}{\partial x^m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial\varphi^m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi^m}{\partial x^m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & 0 & -\dfrac{\partial\psi^1}{\partial x^{m+1}} & \cdots & -\dfrac{\partial\psi^1}{\partial x^n} \\ & \ddots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & & 1 & -\dfrac{\partial\psi^m}{\partial x^{m+1}} & \cdots & -\dfrac{\partial\psi^m}{\partial x^n} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} < \nabla\varphi^1(x_0), h > \\ \cdots \\ < \nabla\varphi^m(x_0), h > \end{pmatrix}.$$

Другими словами, вектор $h \in \mathcal{L}$.

Теперь продифференцируем дважды каждое тождество

$$0 \equiv \varphi^i(\psi^1(\tilde{x}), \ldots, \psi^m(\tilde{x}), \tilde{x}), \ i = 1, \ldots, m,$$

пользуясь теоремой о дифференцировании композиции. Получим $\forall g \in \mathbb{R}^n$

$$< H_{\varphi^i}(x_0)g, g > + \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^k} \frac{\partial^2 \psi^k}{\partial x^l \partial x^j} g^l g^j \equiv 0, \ i = 1, \ldots, m.$$

где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам $k = 1, \ldots, m$, $l, g = m+1, \ldots, n$. Умножая эти равенства на λ_0^i, $i = 1, \ldots, m$, складывая их и полагая $g = h$, получим

$$< H_F(\tilde{x}_0)\tilde{h}, \tilde{h} > = < H_f(x_0)h, h > + \sum_{i=1}^m \lambda_0^i < H_{\varphi^i}(x_0)h, h > +$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x^k} + \sum_{i=1}^m \lambda_0^i \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^k} \right) \frac{\partial \psi^k}{\partial x^l \partial x^j} h^l h^j \right] =$$

$$= < H_\Phi(x_0, \lambda_0)h, h >, \ h \in \mathcal{L}.$$

поскольку (x_0, λ_0) — критическая точка функции Лагранжа.

Утверждение теоремы полностью доказано, поскольку определенность квадратичной формы $< H_\Phi(x_0, \lambda_0)h, h >$ эквивалентна соответствующей определенности квадратичной формы $< H_F(\tilde{x}_0)\tilde{h}, \tilde{h} >$. $\bullet$

5 МЕРА ЖОРДАНА

Король попрыгал — попрыгал
да и ускакал за кулисы.
Марк Твен. "Приключения Гекльбери Финна"

1 Определение меры Жордана

Пусть векторы $a = (a^1, a^2, ..., a^n)$ и $b = (b^1, b^2, ..., b^n)$ принадлежат $\mathbb{R}^n$, причем $a^k \le b^k \;\; k = 1, 2, ...n$. Введем в рассмотрение множество

$$\Pi_a^b = \{x \in \mathbb{R}^n : \; a^k \le b^k \;\; k = 1, 2, ..., n\},$$

которое естественно назвать *$n-$мерным прямоугольником* или просто *прямоугольником.*

Определение 1.1 *Мерой Жордана*[14] $\mu(\Pi_a^b)$ прямоугольника Π_a^b называется число $\mu(\Pi_a^b) \equiv \prod\limits_{k=1}^{n}(b^k - a^k) = (b^1 - a^1)(b^2 - a^2) \cdot \ldots \cdot (b^n - a^n)$.

Очевидно, $\mu(\Pi_a^b) \ge 0$, причем $\mu(\Pi_a^b) = 0$ точно тогда, когда $a^k = b^k$ для некоторого $k \in 1, 2, ...,$. Рассмотрим множество $\Pi_a^b(x^k = a^k) = \{x \in \mathbb{R}^n \;: a^l \le x^l \le b^l \;\; l = 1, 2, ..., n, \;\; l \ne k\}$, которое разумно назвать *передней по x^k гранью* прямоугольника Π_a^b, в отличие от *задней по x^k грани* множества $\Pi_a^b(x^k = b^k) = \{x \in \mathbb{R}^n \;\; : \;\; a^l \le x^l \le b^l \;\;\; l = 1, 2, ..., n, \;\;\; l \ne k\}$. Обе эти грани являются прямоугольниками, поэтому $\mu(\Pi_a^b(x^k = a^k)) = \mu(\Pi_a^b(x^k = b^k)) = 0$; то же самое можно сказать и про все остальные грани. Поэтому считаем, что $\mu(\partial\Pi_a^b) = 0$, где границей $\partial\Pi_a^b$ прямоугольника Π_a^b служит объединение всех его граней.

Пример 1.1 Пусть $n = 1$. Тогда $\Pi_a^b = [a, b]$, $\partial\Pi_a^b = \{a, b\}$ и $\mu(\Pi_a^b) = b - a$, $\mu(\partial\Pi_a^b) = 0$. Здесь мера Жордана "прямоугольника" Π_a^b называется "длиной".

[14] Мари Эдмон Камиль Жордан (1838-1922) — французский математик. Основные направления исследований — математический анализ, алгебра, дифференциальные уравнения, механика.

Пример 1.2 Пусть $n = 2$. Тогда $\Pi_a^b = [a^1, b^1] \times [a^2, b^2]$, $\partial\Pi_a^b = (\{a^1\} \times [a^2, b^2]) \cup (\{b^1\} \times [a^2, b^2]) \cup ([a^1, b^1] \times \{a^2\}) \cup ([a^1, b^1] \times \{b^2\})$.Здесь мера Жордана прямоугольника Π_a^b называется "площадью"и равна $\mu(\Pi_a^b) = [a^1, b^1] \times [a^2, b^2]$. Площадь границы $\partial\Pi_a^b$, очевидно, равна нулю.

Пример 1.3 Пусть $n = 3$. Тогда $\Pi_a^b = [a^1, b^1] \times [a^2, b^2] \times [a^3, b^3]$. Здесь мерой Жордана прямоугольника Π_a^b (т. е. прямоугольного параллепипеда) будет объем $\mu(\Pi_a^b) = (b^1 - a^1)(b^2 - a^2)(b^3 - a^3)$.

Пусть теперь $l = (l^1, l^2, ..., l^n)$, где $l^k \in \mathbb{Z}$ вектор с целочисленными координатами. Обозначим через $\Pi_m^l = \{x \in \mathbb{R}^n \quad : l^k 10^{-m} \leq x^k \leq (l^k + 1)10^{-m} \ \ l \in \mathbb{Z}^n, m \in \mathbb{N}\}$. Нетрудно заметить, что $\mu(\Pi_m^l) = 10^{-mn}$. Кроме того, если $l^1 \neq l^2$, то $\Pi_m^{l^1} \cap \Pi_m^{l^2} = \partial\Pi_m^{l^1} \cap \partial\Pi_m^{l^2}$, и поэтому разумным является правило

$$\mu(\Pi_m^{l^1} \cup \Pi_m^{l^2}) = \mu(\Pi_m^{l^1}) + \mu(\Pi_m^{l^2}), \ \ l^1 \neq l^2.$$

Причем, если есть j попарно не равных векторов $l^1, l^2, ..., l^j \in \mathbb{Z}^n$, то предыдущее правило можно обобщить

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{j} \Pi_m^{l_i}) = \sum_{i=1}^{j} \mu(\Pi_m^{l^i}).$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$–ограниченное множество. Фиксируем $m \in \mathbb{N}$ и через $\underline{s}_m \equiv \underline{s}_m(\Omega)$ обозначим множество $\underline{s}_m = \bigcup\limits_l \Pi_m^l$, где объединение берется по всем $l \in \mathbb{Z}^n$ таким, что $\Pi_m^l \subset \Omega$; а через $\overline{S}_m \equiv \overline{S}_m(\Omega)$ обозначим множество $\overline{S}_m = \bigcup\limits_l \Pi_m^l$, где объединение берется по всем $l \in \mathbb{Z}^n$ таким, что $\Pi_m^l \cap \Omega \neq \emptyset$. Отметим соотношения

(i) $\underline{s}_{m_1} \subset \overline{S}_{m_2}$ $\forall\, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$;
(ii) $\underline{s}_{m_1} \subset \underline{s}_{m_2}$ $\forall\, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ $(m_1 < m_2)$;
(iii) $\overline{S}_{m_2} \subset \overline{S}_{m_1}$ $\forall\, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ $(m_1 < m_2)$.

Упражнение 1.1 Доказать соотношения (i), (ii), (iii). Кроме того, поскольку все входящие в $\underline{s}_m$ ($\overline{S}_m$) прямоугольники не имеют общих внутренних точек, то

$$\mu(\underline{s}_m) = \sum_m \mu(\Pi_m^k), \quad \Pi_m^k \subset \underline{s}_m$$

и

$$\mu(\overline{S}_m) = \sum_m (\Pi_m^k), \quad \Pi_m^k \subset \overline{S}_m.$$

И еще, в силу соотношений (i), (ii), и (iii) справедливы соотношения

(i') $\mu(\underline{s}_{m_1}) \leq \mu(\overline{S}_{m_2})$ $\forall\, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$;
(ii') $\mu(\underline{s}_{m_1}) \leq \mu(\underline{s}_{m_2})$ $\forall\, m_1, m_2 \in \mathbb{N}(m_1 < m_2)$;
(iii') $\mu(\overline{S}_{m_2}) \leq \mu(\overline{S}_{m_1})$ $\forall\, m_1, m_2 \in \mathbb{N}(m_1 < m_2)$.

Упражнение 1.2 Доказать соотношения $(i'), (ii'), (iii')$.

Теперь рассмотрим последовательности $\{\mu(\underline{s}_m)\}$ и $\{\mu(\overline{S}_m)\}$. В силу свойства (ii') первая из них монотонно возрастает и ограничена сверху (в силу своиства (i') (скажем, величиной $\mu(\overline{S}_1)$). Другая же последовательность в силу свойств (iii') и (i') монотонно убывает и ограничена снизу (скажем, величиной $\mu(\underline{s}_1)$). В силу критерия Вейерштрасса каждая из этих последовательностей имеет предел $\underline{\mu}(\Omega) = \lim\limits_{m\to\infty} \mu(\underline{s}_m)$, $\underline{\mu}(\Omega) = \lim\limits_{m\to\infty} \mu(\overline{S}_m)$.

Определение 1.2 Число $\underline{\mu}(\Omega)$ ($\overline{\mu}(\Omega)$) называется *внутренней* (*внешней*) *мерой Жордана* множества Ω. Множество Ω называется *измеримым по Жордану* (в дальнейшем просто *измеримым*), если $\underline{\mu}(\Omega) = \overline{\mu}(\Omega)$. В этом случае число $\mu(\Omega) = \underline{\mu}(\Omega) = \overline{\mu}(\Omega)$ называется *мерой Жордана* множества Ω.

В силу предположения об ограниченности множества Ω все неограниченные множества автоматически считаются незмеримыми по Жордану. Однако кроме неограниченных среди неизмеримых по Жордану множеств встречаются и ограниченные множества. Ниже мы построим пример неизмеримого по Жордану множества, а сейчас установим весьма полезный в дальнейшем критерий измеримости.

Определение 1.3 Множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется *множеством жордановой меры нуль*, если $\overline{\mu}(\Omega) = 0$.

Обратим внимание на использовании в определении 1.3 только внешней меры Жордана. Дело здесь в том, что для множеств меры нуль внутренней меры Жордана может и не быть. Например, грань $\Pi_a^b(x^k = a^k)$ прямоугольника Π_a^b не имеет внутренних точек, а потому для нее нельзя определить внутреннюю меру Жордана.

Теорема 1.1 *Множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ измеримо точно тогда, когда оно ограничено и его граница $\partial\Omega$ имеет жорданову меру нуль.*

$circ$ Обозначим через $S_m^* = \bigcup\limits_l \Pi_m^l$, где объединение взято по таким векторам $l \in \mathbb{Z}^n$, что $\Pi_m^l \subset \overline{S}_m^l \backslash \underline{s}_m^l$. Другими словами, множество S_m^* состоит из точек тех, и только тех прямоугольников Π_m^l, для которых $\Pi_m^l \cap \partial\Omega \neq \emptyset$.

Поскольку $\mu(S_m^*) = \mu(\overline{S}_m) - \mu(\underline{s}_m)$, то в силу измеримости множества Ω имеем

$$\overline{\mu}(\partial\Omega) = \lim_{m\to\infty} \mu(S_m^*) = \lim_{m\to\infty} (\mu(\overline{S}_m) - \mu(\underline{s}_m)) = 0.$$

Теперь пусть $\overline{\mu}(\partial\Omega) = 0$. В силу ограниченности множества Ω существуют внутренняя и внешняя меры Жордана. Поэтому

$$0 = \overline{\mu}(\partial\Omega) = \lim_{m\to\infty} (\mu(\overline{S}_m) - \mu(\underline{s}_m)) = \overline{\mu}(\Omega) - \underline{\mu}(\Omega),$$

т. е. множество Ω измеримо. •

Замечание 1.1 Ясно, что доказательство теоремы 1.1 проходит, если множество Ω имеет внутренние точки, т. е. последовательность $\{\mu(\underline{s}_m)\}$ непуста. В противном случае, чтобы сделать справедливым доказательство, необходимо положить $\underline{\mu}(\Omega) = 0$.

Пример 1.4 Рассмотрим множество Ω всех рациональных чисел на отрезке $[0,1]$. Поскольку в любой окрестности рационального числа существует бесконечно много иррациональных чисел, то внутренность множества Ω пуста. С другой стороры, каждое иррациональное число можно представить как предел последовательности иррациональных чисел, то $\overline{\Omega} = [0,1]$. Отсюда граница $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \overset{\circ}{\Omega} = [0,1]$. Поскольку мера границы $\overline{\mu}(\partial\Omega) = \mu([0,1]) = 1 \neq 0$, то в силу теоремы 1.1 множество Ω неизмеримо по Жордану, хотя оно, очевидно, ограничено.

2 Свойства меры Жордана

Теорема 2.1 *Пусть* $\Omega', \Omega'' \subset \mathbb{R}^n$ *– два измеримых множества, причем* $\Omega' \cap \Omega'' = 0$*. Тогда их объединение тоже измеримо, причем*

$$\mu(\Omega' \cup \Omega'') = \mu(\Omega') + \mu(\Omega'').$$

$\circ$ Пусть $\underline{s}'_m \subset \Omega'$ и $\underline{s}''_m \subset \Omega''$, тогда $\underline{s}_m(\Omega' \cup \Omega'') = \underline{s}'_m \cup \underline{s}''_m$, так как $\Omega' \cap \Omega'' = \emptyset$. Отсюда

$$\mu(\underline{s}'_m \cup \underline{s}''_m) = \mu\underline{s}'_m) + \mu(\underline{s}''_m).$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, в силу измеримости Ω' и Ω'', получим

$$\underline{\mu}(\Omega' \cup \Omega'') = \mu(\Omega') + \mu(\Omega'')\,. \tag{2.1}$$

Теперь пусть $\overline{S}'_m \supset \Omega'$ и $\overline{S}''_m \supset \Omega''$, тогда $\overline{S}_m(\Omega' \cup \Omega'') = \overline{S}'_m \cup \overline{S}''_m$, однако теперь может быть $\overline{S}'_m \cap \overline{S}''_m \neq \emptyset$. Поэтому положим $S^*_m = \bigcup\limits_l \Pi^l_m$, где объединение берется по таким $l \in \mathbb{Z}^n$, что $\Pi^l_m \subset \overline{S}'_m \cap \overline{S}''_m$. Значит,

$$\mu(\overline{S}_m) = \mu(\overline{S}'_m) + \mu(\overline{S}''_m) - \mu(S^*_m) \leq \mu(\overline{S}'_m) + \mu(\overline{S}''_m).$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, в силу измеримости Ω' и Ω'', получим

$$\overline{\mu}(\Omega' \cup \Omega'') \leq \mu(\Omega') + \mu(\Omega''). \tag{2.2}$$

Поскольку $\underline{\mu}(\Omega) \leq \overline{\mu}(\Omega)$ в любом случае, то из (2.1) и (2.2) вытекает утверждение. •

Доказанная теорема устанавливает *аддитивность меры Жордана.*

Следствие 2.1 *Пусть* $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_k \subset \mathbb{R}^n$ *— попарно непересекающиеся измеримые множества. Тогда их объединение тоже измеримо, причем*

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i) = \sum_{i=1}^{k} \mu(\Omega_i).$$

Упражнение 2.1 Доказать следствие 2.1.

Теорема 2.2 *Пусть* $\Omega', \Omega'' \subset \mathbb{R}^n$ *— два измеримых множества, причем* $\Omega' \subset \Omega''$. *Тогда* $\mu(\Omega') \subset \mu(\Omega'')$.

∘ Пусть $\underline{s}'_m \subset \Omega' \subset \Omega'' \subset \overline{S}''_m$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $\underline{\mu}(\Omega') \leq \overline{\mu}(\Omega'')$. В силу измеримости Ω' и Ω'' окончательно имеем

$$\mu(\Omega') = \underline{\mu}(\Omega') \leq \overline{\mu}(\Omega'') = \mu(\Omega'').\bullet$$

Эта теорема устанавливает *монотонность меры Жордана.*

Теорема 2.3 *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*–измеримое множество. Тогда множества* $\overset{\circ}{\Omega}$ *и* $\overline{\Omega}$ *тоже измеримы, причем*

$$\mu(\Omega) = \mu(\overset{\circ}{\Omega}) = \mu(\overline{\Omega})\,. \tag{2.3}$$

∘ Поскольку $\partial\Omega = \partial \overset{\circ}{\Omega} = \partial\overline{\Omega}$, то множества $\overset{\circ}{\Omega}$ и $\overline{\Omega}$ измеримы в силу теоремы 1.1. Далее, поскольку $\overline{\Omega} = \overset{\circ}{\Omega} \cup \partial\Omega$ и $\overset{\circ}{\Omega} \cap \partial\Omega = \emptyset$, то в силу теоремы 2.1

$$\mu(\overset{\circ}{\Omega}) = \mu(\overline{\Omega})\,. \tag{2.4}$$

И наконец, поскольку $\overset{\circ}{\Omega} \subset \Omega \subset \overline{\Omega}$, то равенство (2.3) справедливо в силу (2.4) и теоремы 2.2. •

3 Множества жордановой меры нуль

Нетрудно показать, что пустое множество имеет меру нуль. Действительно, поскольку оно содержится в любом множестве, то $\emptyset \subset \Pi_m^l$ при любом $m \in \mathbb{N}$ и некотором $l \in \mathbb{Z}^n$. Далее, $\mu(\Pi_m^l) = 10^{-mn}$, поэтому устремляя $m \to \infty$, получим $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$.

Пустое множество–самый простой пример множества жордановой меры нуль. Однако в дальнейшем нам потребуются более содержательные примеры множеств нулевой жордановой меры.

Теорема 3.1 *График всякой непрерывной функции, определенной на компактном измеримом множестве, имеет жорданову меру нуль.*

$\circ$ Пусть функция $f \in \mathrm{C}(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — измеримый компакт. Тогда $\mathrm{graph}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x = (x^1, x^2, ..., x^n, f(x^1, x^2, ..., x^n))$, где $(x^1, x^2, ..., x^n) \in \Omega\}$.

Построим множество $\overline{S}_m(\mathrm{graph}(f)) = \overline{S}_m \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Это множество распадается на конечное число столбиков S_m^k, состоящих из прямоугольников, которые имеют одну и ту же проекцию Q_m^k во множестве Ω. Положим

$$\omega(Q_m^k) = \max_{x \in Q_m^k} f(x) - \min_{x \in Q_m^k} f(x).$$

Тогда высота h_m^k каждого столбика S_m^k оценивается следующим образом

$$h_m^k \leq \omega(Q_m^k) + 2 \cdot 10^{-m}$$

Отсюда

$$\mu(\overline{S}_m) = \sum_k \mu(S_m^k) = \sum_k h_m^k \mu(Q_m^k) \leq \sum_k (\omega(Q_m^k)+$$

$$+2 \cdot 10^{-m})\mu(Q_m^k) \leq (\omega_m + 2 \cdot 10^{-m} \mu(\Pi_a^b)\,,$$

где (Π_a^b)–некоторый прямоугольник такой, что $\Pi_a^b \supset \Omega$, а $\omega_m = \max\limits_k \omega(Q_m^k)$.

Далее, поскольку функция f равномерно непрерывна на Ω (теорема Кантора), то $\lim\limits_{m\to\infty} \omega_m = 0$. Поэтому

$$0 \leq \overline{\mu}(\mathrm{graph}(f)) = \lim_{m\to\infty} (\overline{S}_m) \leq \lim_{m\to\infty} (\omega_m + 2 \cdot 10^{-m})\mu(\Pi_a^b) = 0.$$

Отсюда следует утверждение теоремы. •

Следствие 3.1 *Пусть граница $\partial\Omega$ множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ состоит из конечного числа графиков непрерывных функций, определенных на компактах. Тогда множество Ω измеримо.*

Упражнение 3.1 Доказать следствие 3.1.

4 Жорданова мера и диффеоморфизмы

Приступим к изучению изменения меры Жордана под воздействием диффеоморфизма.

Теорема 4.1 *Пусть $\varphi : \Omega_x \to \Omega_y$–диффеоморфизм, и пусть $h > 0$ таково, что прямоугольник*

$$\Pi = \{x \in \Omega_x : x_0^k \leq x^k \leq x_0^k + h \quad k = 1, 2, ..., n\} \subset \Omega_x.$$

Тогда

$$\mu(\varphi(\Pi)) = \mu(\Pi)|\mathrm{det} J_\varphi(x_0)| + \widetilde{o}(h^n).$$

Доказательство этого свойства очень сложно в техническом отношении, поэтому мы его опускаем. Ограничимся только эвристическими рассуждениями в случае $n = 2$.

Подействуем на квадрат $\Pi \subset \Omega_x \subset \mathbb{R}^2_x$ вектор-функцией φ, получим некоторую криволинейную фигуру $\varphi[\Pi] \subset \Omega_y \subset \mathbb{R}^2_y$. Поскольку образ $\varphi[\partial\Pi]$ границы квадрата Π–кусочно гладкая кривая, то $\overline{\mu}(\varphi[\partial\Pi]) = 0$ и, следовательно, фигура $\varphi[\Pi]$ измерима.

В виду дифференцируемости вектор-функции φ в точке (x_0^1, x_0^2) имеем

$$y^1 = y_0^1 + \frac{\partial\varphi^1}{\partial x^1}(x^1 - x_0^1) + \frac{\partial\varphi^1}{\partial x^2}(x^2 - x_0^2) + \widetilde{o}(|x - x_0|_2),$$

$$y^2 = y_0^2 + \frac{\partial\varphi^2}{\partial x^1}(x^1 - x_0^1) + \frac{\partial\varphi^2}{\partial x^2}(x^2 - x_0^2) + \widetilde{o}(|x - x_0|_2).$$

Построим аффинное преобразование

$$\widetilde{\varphi}(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0^1 + \dfrac{\partial\varphi^1}{\partial x^1}(x^1 - x_0^1) + \dfrac{\partial\varphi^1}{\partial x^2}(x^2 - x_0^2) \\ \\ y_0^2 + \dfrac{\partial\varphi^2}{\partial x^1}(x^1 - x_0^1) + \dfrac{\partial\varphi^2}{\partial x^2}(x^2 - x_0^2) \end{pmatrix}.$$

Из аналитической геометрии известно, что при аффинном преобразовании образ всякого прямоугольника является параллелограммом, причем отношение площади отображаемого прямоугольника равняется абсолютной величине определителя преобразования, который для преобразования $\widetilde{\varphi}$ совпадает с якобианом вектор-функции φ в точке (x_0^1, x_0^2). Таким образом, в нашем случае имеем

$$\frac{\mu(\widetilde{\varphi}[\Pi])}{\mu(\Pi)} = |\mathrm{det} J_\varphi(x_0^1, x_0^2)|.$$

На этом эвристические рассуждения закончим, подчеркнем лишь то, что следует запомнить, а именно: *геометрический смысл якобиана диффеоморфизма заключается в том, что он является коэффициентом, характеризующим изменение меры множества при отображении этим диффеоморфизмом.*

Рассмотрим *геометрический смысл* матрицы и определителя Грама диффеоморфизма. Для наглядности мы рассмотрим случай $n = 3$, $k = 2$, причем в традиционных обозначениях. Именно, на плоскости $\mathbb{R}^2$ считаем заданными координаты (u, v), а в пространстве $\mathbb{R}^3$ — координаты (x, y, z). Диффеоморфизм некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ на поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ в данной ситуации принято обозначать как

$$r(u, v) = \mathrm{col}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \,.$$

Найдем матрицу и определитель Грама

$$G_r = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}, \ \det G_r = G_{11}G_{22} - G_{12}^2 \,,$$

где

$$G_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 =< r'_u, r'_u > ,$$

$$G_{12} = G_{21} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} =< r'_u, r'_v > ,$$

$$G_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 =< r'_v, r'_v > \ .$$

В традиционных обозначениях дифференциальной геометрии $G_{11} = E$, $G_{22} = G$, $G_{12} = F$, и матрица Грама называется *матрицей параметризованной поверхности* S, а ее определитель есть квадрат отношения площадей параллелограммов, натянутых на векторы $r'_u du$, $r'_v dv$ и du, dv соответственно. Площадь параллелограмма I' равна площади параллелограма I, умноженной на $\sqrt{\det G_r}$.

6 ИНТЕГРАЛ РИМАНА

Том ... спросил Бекки:
-Вы любите крыс?
-Нет, терпеть их не могу.
-Ну да, живых и я тоже. А я говорю о дохлых ...
Марк Твен. "Приключения Тома Сойера"

1 Определение кратного интеграла Римана

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$–ограниченное множество. *Диаметром* множества Ω называется число

$$\operatorname{diam}(\Omega) = \max_{x,y \in \overline{\Omega}} |x-y|_n.$$

Поскольку множество $\overline{\Omega}$ компактно (так как оно замкнуто и ограничено), а расстояние $|x-y|_n$–непрерывная на компакте $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ функция, то в силу теоремы Вейерштрасса о максимальном значении непрерывной функции на компактном множестве диаметр определяется корректно.

Определение 1.1 Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$–измеримое множество. Множество $r = \{\Omega_i \ : \ i = 1, 2, ..., k\}$ измеримых множеств называется *разбиением множества* Ω, если

(i) $\Omega_i \subset \Omega \;\; i = 1, 2, ..., k$;

(ii) $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \;\; i, j = 1, 2, ..., k, \; i \neq j$;

(iii) $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \overline{\Omega}_i = \overline{\Omega}$.

Число $\delta_r = \max\limits_{1 \le i \le k} \operatorname{diam}(\Omega)$ называется *мелкостью разбиения* r.

Упражнение 1.1 Пусть $r = \{\Omega_i \ : \ i = 1, 2, ..., k\}$–разбиение измеримого множества Ω. Доказать, что

$$\mu(\Omega) = \sum_{i=1}^{k} \mu(\Omega_i).$$

Определение 1.2 Пусть $r' = \{\Omega_i'\}$ и $r'' = \{\Omega_i''\}$–два разбиения измеримого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Разбиение r'' называется разбиением, вписанным в разбиение r' (пишется $r'' \succ r'$), если

$$\forall\, \Omega_i'' \in r'' \;\; \exists\, \Omega_j' \in r' \;\; (\Omega_i'' \subset \Omega_j')$$

Упражнение 1.2 Доказать следующее свойства разбиений:

(i) если r' и r''–два разбиения измеримого множества Ω, то существует такое разбиение r''' этого множества, что $r''' \succ r'$ и $r''' \succ r''$;

(ii) если r', r'' и r'''–разбиение измеримого множества Ω, причем $r'' \succ r'$ и $r''' \succ r''$, то $r''' \succ r'$.

Рассмотрим функцию $f : \Omega \to \mathbb{R}$, определенную на некотором измеримом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с разбиением $r = \{\Omega_i \;\; : i = 1, 2, ..., k\}$. Выберем во множестве Ω k произвольных точек $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k$. таких, что $\xi_i \in \Omega_i \;\; i = 1, 2, ..., k$. Сумма

$$\sigma_r \equiv \sigma_r(f; \xi_1, \xi_2, ..., \xi_k) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\mu(\Omega_i)$$

называется *интегральной суммой Римана*[15].

Определение 1.3 Функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *интегрируемой по Риману* на измеримом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, если существует конечный предел $\lim\limits_{\delta_r \to 0} \sigma_r$, не зависящей от разбиений $r = \{\Omega_i\}$ и выбора точек $\xi_i \in \Omega_i$. Этот предел называется *кратным интегралом Римана* от функции f по множеству Ω, которое, в свою очередь, называется областью интегрирования, и обозначается символами

$$\int\limits_{\Omega} f dx \qquad \int\!\!\int\limits_{\Omega} \dots \int f(x^1, x^2, ..., x^n) dx^1 dx^2 ... dx^n.$$

Множество всех интегрируемых на Ω функций обозначается символом $\mathcal{R}(\Omega)$.

[15]Георг Фридрих Бернгард Риман (1826-1866)–немецкий математик. Основные направления исследований–математический анализ, теория функций, геометрия, математическая и теоретическая физика.

Заметим еще, что если $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ или $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, то стандартная запись кратного интеграла Римана такова

$$\int\limits_{\Omega}\int f(x,y)dxdy \quad \int\int\limits_{\Omega}\int f(x,y,z)dxdydz.$$

Сформулируем и докажем *Критерий Коши* интегрируемости функции $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$–некоторое измеримое множество.

Теорема 1.1 $f \in \mathcal{R}(\Omega) \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, r, r' \;\; \forall \{\xi_i\}, \{\xi_i'\}$ $(\delta_r, \delta_{r'} < \delta \Rightarrow |\sigma_r - \sigma_{r'}| < \varepsilon)$

$\circ$ $(\Rightarrow)$ Пусть функция $f \in \mathcal{R}(\Omega)$. Положим

$$R = \int\limits_{\Omega} f(x)dx.$$

В силу определния 1.3 по данному $\varepsilon > 0$ найдем такое $\delta > 0$, что для любых разбиений r и r' множества Ω, мелкости которых δ_r и $\delta_{r'}$ строго меньше δ, и для любых наборов точек $\{\xi_i\}$ и $\{\xi_i'\}$, соответсвующих этим разбиениям, имеем

$$|\sigma_r - R| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\sigma_{r'} - R| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда в силу свойств модуля получаем

$$|\sigma_r - \sigma_{r'}| \leq |\sigma_r - R| + |R - \sigma_{r'}| < \varepsilon.$$

$(\Leftarrow)$ По данному $\varepsilon > 0$ найдем такое $\delta > 0$, что для любых разбиений r и r', мелкости которых δ_r и $\delta_{r'}$ строго меньше δ, и для любых наборов точек $\{\xi_i\}$ и $\{\xi_i'\}$, соответствующих этим разбиениям, имеем

$$|\sigma_r - \sigma_{r'}| < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{1.1}$$

Обозначим через Σ_δ множество сумм Римана, для которых справедливо (4.1).

Пусть $\sigma_{r'} \in \Sigma_\delta$–некоторая фиксированная сумма Римана. Тогда из (1.1) вытекает, что

$$\sigma_{r'} - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_r < \sigma_{r'} + \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\, \sigma_r \in \Sigma_\delta\,. \tag{1.2}$$

Значит, множество Σ_δ ограничено. Обозначим

$$i_\delta = \inf \Sigma_\delta, \quad s_\delta = \sup \Sigma_\delta.$$

Очевидно, что $\Sigma_{\delta'} \subset \Sigma_\delta$, если $\delta > \delta'$, поэтому

$$i_\delta \le i_{\delta'} = \inf \Sigma_{\delta'}, \quad s_\delta \ge s_{\delta'} = \sup \Sigma_{\delta'}.$$

Устремляя $\delta \to 0$, получим множество $\{[i_\delta, s_\delta]\}$ вложенных отрезков. Согласно принципу Коши-Кантора это множество имеет общую точку R. Поскольку

$$i_\delta \le R \le s_\delta \quad i_\delta \le \sigma_r \le s_\delta,$$

то

$$|\sigma_r - R| \le s_\delta - i_\delta \quad \forall\, \sigma_r \in \Sigma_\delta\,. \tag{1.3}$$

С другой стороны, из (1.2) получаем, что

$$\sigma_{r'} - \frac{\varepsilon}{3} \le i_\delta \le s_\delta \le \sigma_{r'} + \frac{\varepsilon}{3},$$

т. е.

$$s_\delta - i_\delta \le \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon\,. \tag{1.4}$$

Значит, из (1.3) и (1.4) следует доказательство утверждения ($\Leftarrow$). $\bullet$

2 Существование кратного интеграла

Мы рассмотрим только два условия. Сначала сформулируем и докажем *необходимое условие.*

Теорема 2.1 *Пусть функция $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$–измеримое множество. Тогда функция f ограничена на множестве Ω.*

$\circ$ Предположим противное. Построим сумму Римана

$$\sigma_r = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\mu(\Omega_i)$$

функции f, соответствующую некоторому разбиению r. Поскольку функция f неограничена на Ω, то существует множество $\Omega_i \in r$, на котором функция f так же неограничена. Запишем

$$\sigma_r = \sigma_r(\xi_{i_0}) = f(\xi_{i_0})\mu(\Omega_{i_0}) + \sum f(\xi_i)\mu(\Omega_i) = f(\xi_{i_0})\mu(\Omega_{i_0}) + A,$$

где сумма берется по всем таким $i \in \{1, 2, ..., k\}$, что $i \neq i_0$.

Поскольку функция f неограничена на Ω_{i_0}, то не меняя величины A, мы можем сделать величину $|f(\xi_{i_0})|\mu(\Omega_{i_0})$ сколь угодно большой в силу произвола в выборе точки $\xi_{i_0} \in \Omega_{i_0}$. А поскольку

$$|\sigma_r(\xi_{i_0})| \geq |f(\xi_{i_0})|\mu(\Omega_{i_0}) - |A|,$$

то отсюда следует неинтегрируемость функции f, что противоречит условию теоремы. $\bullet$

Пример 2.1 Пусть $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Фукцию $f : \Omega \to \mathbb{R}$ определим следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ x, y \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку при любом разбиении $r = \{\Omega_i\}$ множества Ω в каждом множестве Ω_i найдутся точки с рациональными координатами, то мы всегда сможем добиться того, чтобы

$$|\sigma_r - \sigma_{r'}| > \frac{1}{2}.$$

Значит, функция f ограничена, но неинтегрируема.

Теперь сформулируем и докажем *достаточное условие* интегрируемости по Риману.

Теорема 2.2 *Пусть функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ непрерывна на замкнутом измеримом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Тогда функция $f \in \mathcal{R}(\Omega)$.*

∘ Рассмотрим сначала следующую ситуацию. Пусть r и r'– два разбиения множества Ω, причем разбиение r' вписано в r. Рассмотрим функцию f на каком-либо множестве $\Omega_i \in r$. Поскольку функция f непрерывна на Ω, значит, она непрерывна и на $\overline{\Omega_i}$. По теореме Вейерштрасса существуют

$$m_i = \min_{x\in\overline{\Omega_i}} f(x) \quad M_i = \max_{x\in\overline{\Omega_i}} f(x).$$

Положим

$$\underline{\sigma}_r = \sum_{i=1}^{k} m_i\mu(\Omega_i), \;\; \overline{\sigma}_r = \sum_{i=1}^{k} M_i\mu(\Omega_i).$$

Очевидно,

$$\underline{\sigma}_r \leq \sigma_r \leq \overline{\sigma}_r \tag{2.5}$$

для любой суммы Римана σ_r, соответствующей разбиению r.

Теперь аналогично предыдущему построим

$$\underline{\sigma}_{r'} = \sum_{j=1}^{k'} m'_j\mu(\Omega_j), \quad \overline{\sigma}_{r'} = \sum_{j=1}^{k'} M'_j\mu(\Omega_j)$$

и покажем, что

$$\underline{\sigma}_r \leq \underline{\sigma}_{r'} \leq \overline{\sigma}_{r'} \leq \overline{\sigma}_r\,. \tag{2.6}$$

Действительно, первое неравенство в (2.6) справедливо, поскольку

$$\underline{\sigma_r} = \sum_{i=1}^{k} m_i\mu(\Omega_i) = \sum_{i=1}^{k} m_i \sum_{j=1}^{j_i} \mu(\Omega_j^i) \leq \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{j_i} m'_j\mu(\Omega_j^i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k'} m_j\mu(\Omega_j^i) = \underline{\sigma_{r'}}\,,$$

где через Ω_j^i обозначены те множества из разбиения r', которое содержатся во множестве $\Omega_i \in r$. Второе неравенство в (2.6) очевидно, а третье доказывается аналогично первому.

Теперь обратимся непосредственно к доказательству теоремы. Пусть $r = \{\Omega_i\}$ и $r' = \{\Omega'_j\}$–два произвольных разбиения множества Ω. Возьмем еще одно разбиение r'', вписанное в r и r'. В силу (2.5) и (2.6) имеем

$$\underline{\sigma}_r \leq \sigma_r \leq \overline{\sigma}_r, \quad \underline{\sigma}_r \leq \sigma_{r''} \leq \overline{\sigma}_r;$$

$$\underline{\sigma}_{r'} \leq \sigma_{r'} \leq \overline{\sigma}_{r'}, \quad \underline{\sigma}_{r'} \leq \sigma_{r''} \leq \overline{\sigma}_{r'}.$$

Отсюда

$$|\sigma_r - \sigma_{r''}| \leq \overline{\sigma}_r - \underline{\sigma}_r = \sum_{i=1}^{k}(M_i - m_i)\mu(\Omega_i) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} \omega_i \mu(\Pi_a^b) \leq \omega\mu(\Pi_a^b)\,,$$

где $\omega_i = M_i - m_i$, $\omega = \max\limits_{1\leq i\leq k} \omega_i$, Π_a^b–некоторый прямоугольник такой, что $\Omega \subset \Pi_a^b$. Аналогично,

$$|\sigma_{r''} - \sigma_{r'}| \leq \omega' \mu(\Pi_a^b).$$

Далее, поскольку функция f равномерно непрерывна на множестве Ω (теорема Кантора), то мы для любого заданного $\varepsilon > 0$ можем подобрать такое $\delta > 0$, что как только мелкости разбиений $\delta_r, \delta_{r'} < \delta$, так сразу

$$\omega, \omega' < \varepsilon(2\mu(\Pi_a^b))^{-1}.$$

Отсюда

$$|\sigma_r - \sigma_{r'}| \leq |\sigma_r - \sigma_{r''}| + |\sigma_{r''} - \sigma_{r'}| \leq (\omega + \omega')\mu(\Pi_a^b) < \varepsilon\,.$$

Ссылка на теорему 1.1 завершает доказательство. •

Пример 2.2 Условие замкнутости множества Ω в теореме 2.2 является *существенным*. Действительно, пусть $\Omega = (0,1] \times (0,1]$. На множестве Ω рассмотрим функцию $f(x,y) = (x \cdot y)^{-1}$. Она, очевидно, непрерывна и неограничена. Стало быть, $f \notin \mathcal{R}(\Omega)$ по теореме 2.1.

3 Кратный интеграл по множеству меры нуль

Пусть $r = \{\Omega_i\}$–разбиение измеримого множества Ω и множество $\Omega' \subset \Omega$. Положим

$$r/\Omega' = \{\Omega_i \in r \ : \ \Omega_i \cap \Omega \neq \emptyset\}.$$

Лемма 3.1 *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$–измеримое множество, $\Omega' \subset \Omega$ и $\overline{\mu}(\Omega') = 0$. Тогда*

$$\lim_{\delta_r \to 0} \sum_{\Omega_i \in r/\Omega'} \mu(\Omega') = 0.$$

$\circ$ Для фиксированного $\varepsilon > 0$ в силу условия $\overline{\mu}(\Omega') = 0$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что если $\overline{S}_m = \overline{S}_m(\Omega')$, то

$$\mu(\overline{S}_m) < \frac{\varepsilon}{3^n}.$$

Пусть Π_j $j = 1, 2, ..., k$–все прямоугольники, которые содержатся в $\overline{S}_m$, т. е. $\overline{S}_m = \bigcup\limits_{j=1}^{k} \Pi_j$. Пусть P_j– прямоугольник, составленный из всех прямоугольников с ребром 10^{-m}, пересекающихся с прямоугольником Π_j. Поскольку ребро P_j в три раза больше ребра Π_j, то $\mu(\mathrm{P}_j) = 3^n \mu(\Pi_j)$. Положим $\mathrm{P} = \cup_{j=1}^{k} \mathrm{P}_j$. Множество P, очевидно, измеримо, поэтому

$$\mu(\mathrm{P}) = \mu(\bigcup_{j=1}^{k} \mathrm{P}_j) \leq \sum_{j=1}^{k} \mu(\mathrm{P}_j) = 3^n \sum_{j=1}^{k} \mu(\Pi_j) = 3^n \mu(\overline{S}_m) < \varepsilon.$$

Заметим теперь, что любое множество Ω'', которое имеет диаметр $\mathrm{diam}(\Omega'') < 10^{-m}$ и пересекается с прямоугольником Π_j, целиком лежит в P_j. Возьмем какое-либо разбиение r множества Ω мелкости $\delta_r < 10^{-m}$. Тогда, если $\Omega_i \in r/\Omega'$, а значит, $\Omega_i \cap \overline{S}_m \neq \emptyset$, то $\Omega_i \subset \mathrm{P}_i$. Таким образом,

$$\bigcup_{\Omega_i \in r/\Omega'} \Omega_i \subset \mathrm{P}.$$

Отсюда

$$\mu(\bigcup_{\Omega_i \in r/\Omega'} \Omega_i) = \sum_{\Omega_i \in r/\Omega'} \mu(\Omega_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \mu(\mathrm{P}_i) < \varepsilon.$$

Это значит, повторим, что для любого $\varepsilon > 0$ мы указали такую мелкость $\delta_r < 10^{-m}$, что для любого разбиения r с мелкостью δ_r

$$\mu(\bigcup_{\Omega_i \in r/\Omega'} \Omega_i) < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. •

Прежде, чем сформулировать и доказать основной результат этого раздела, приведем несколько вспомагательных определений.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$–измеримое множество, $r = \{\Omega_i\}$–его разбиение, и множество $\Omega' \subset \overline{\Omega}$. Обозначим

$$r' = r'(\Omega') = \{\Omega_i \in r \ : \ \Omega_i \cap \Omega' = \varnothing\}.$$

Для всякой функции $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ определим

$$\sigma_{r'}(f) = \sum_{\Omega_i \in r'} f(\xi_i)\mu(\Omega_i), \quad \xi_i \in \Omega_i.$$

Теорема 3.1 *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$–измеримое множество и множество $\Omega' \subset \overline{\Omega}$, причем $\overline{\mu}(\Omega') = 0$. Пусть функция $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ ограничена. Тогда предел*

$$\lim_{\delta_r \to 0} \sigma_r(f) = \int\limits_{\Omega} f(x)dx$$

существует точно тогда, когда существует предел

$$\lim_{\delta_r \to 0} \sigma_{r'}(f).$$

При этом, если последний предел существует, то он также равен

$$\int\limits_{\Omega} f(x)dx.$$

$\circ$ Пусть $r = \{\Omega_i\}$–некоторое разбиение множества Ω. Тогда

$$r = r/\Omega' \cup r'.$$

Положим

$$\sigma_{r/\Omega'}(f) = \sum_{\Omega_i \in r/\Omega'} f(\xi_i)\mu(\Omega_i), \quad \xi_i \in \Omega_i.$$

Очевидно, что

$$\sigma_r(f) = \sigma_{r'}(f) + \sigma_{r/\Omega'}(f)\,. \tag{3.7}$$

В силу ограниченности функции $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ существует число $M \in \mathbb{R}_+$ такое, что $|f(x)| \leq M \;\; \forall\, x \in \overline{\Omega}$. Поэтому

$$|\sigma_{r/\Omega'}(f)| \leq M \sum_{\Omega_i \in r/\Omega'} \mu(\Omega_i).$$

В силу леммы 3.1

$$\lim_{\delta_r \to 0} \sigma_{r/\Omega'}(f) = 0.$$

Отсюда в силу (3.7) сразу вытекает утверждение теоремы. $\bullet$

Доказанная теорема позволяет при вычислении интеграла пренебрегать множествами, имеющими жорданову меру нуль. В частности, в силу теоремы ?? можно пренебрегать границей области интегрирования.

Замечание 3.1 Если функция $f \in \mathcal{R}(\overline{\Omega})$, то в силу необходимого условия интегрируемости (теорема 2.1), условие ограниченности в теореме 3.1 излишне.

4 Свойства кратного интеграла Римана

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$–измеримое по Жордану множество. Тогда

$$\int\limits_{\Omega} dx = \mu(\Omega).$$

Это равенство, устанавливающее связь между интегралом Римана и мерой Жордана, доказывается весьма просто. Действительно,

$$\int\limits_{\Omega} dx = \lim_{\delta_r \to 0} \sum_{i=1}^{k} \mu(\Omega_i) = \lim_{\delta_r \to 0} \mu(\Omega) = \mu(\Omega).$$

Приступим к рассмотрению других, менее тривиальных свойств интеграла Римана.

Теорема 4.1 *Пусть $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$–измеримые множества, причем $\Omega \supset \Omega'$. Если функция f интегрируема на Ω, то она будет интегрируема и на Ω'.*

$\circ$ Пусть $\Omega \neq \Omega'$ (в противном случае утверждение очевидно). Положим $\Omega'' = \Omega \setminus \Omega'$. Пусть $r = \{\Omega_i\}$ и $r' = \{\Omega'_j\}$–разбиение множества Ω', а $r'' = \{\Omega''_k\}$–разбиение множества Ω''. Тогда $r \cup r''$ и $r' \cup r''$–разбиения множества Ω. Составим суммы Римана

$$\sigma_{r \cup r''} = \sum_i f(\xi_i)\mu(\Omega_i) + \sum_k f(\xi''_k)\mu(\Omega'') = \sigma_r + \sigma_{r''};$$

$$\sigma_{r' \cup r''} = \sum_j f(\xi'_i)\mu(\Omega'_j) + \sum_k f(\xi''_k)\mu(\Omega''_k) = \sigma_{r'} + \sigma_{r''}.$$

Отсюда

$$\left|\sigma_{r \cup r''} - \sigma_{r' \cup r''}\right| = \left|\sigma_r - \sigma_{r'}\right|. \tag{4.8}$$

Из интегрируемости функции f на Ω в силу критерия Коши левая часть (4.8) стремится к нулю при $\delta = \max\{\delta_r, \delta_{r'}, \delta_{r''}\} \to 0$. Значит, и правая часть (4.8) тоже стремится к нулю, что в силу критерия Коши означает интегрируемость функции f на Ω'. $\bullet$

Теорема 4.2 *Пусть $\Omega, \Omega', \Omega'' \subset \mathbb{R}^n$–измеримые множества, причем $\Omega = \Omega' \cup \Omega''$ и $\Omega' \cap \Omega'' = \emptyset$. Тогда справедливо утверждение*

$$f \in \mathcal{R}(\Omega) \Leftrightarrow f \in \mathcal{R}(\Omega') \cap \mathcal{R}(\Omega'')$$

причем имеет место равенство

$$\int\limits_{\Omega} f(x)dx = \int\limits_{\Omega'} f(x)dx + \int\limits_{\Omega''} f(x)dx.$$

∘ (⇒) Пусть функция $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, тогда в силу теоремы 4.1 существуют интегралы

$$\int\limits_{\Omega'} f(x)dx \quad \int\limits_{\Omega''} f(x)dx\,. \tag{4.9}$$

Пусть далее $r' = \{\Omega_i'\}$ и $r'' = \{\Omega_j''\}$–два разбиения множеств Ω' и Ω'' соответственно, тогда $r = r' \cup r''$–разбиение множества Ω с мелкостью $\delta_r = \max\{\delta_{r'}, \delta_{r''}\}$. Построим суммы Римана

$$\sigma_r = \sigma_{r'} + \sigma_{r''}\,. \tag{4.10}$$

Поскольку слагаемые в правой части (4.10) сходятся к интегралам (4.9) соответственно, то из (4.10) имеем

$$\lim_{\delta_r \to 0} \sigma_r = \int\limits_{\Omega} f(x)dx\,. \tag{4.11}$$

(⇐) Пусть существуют интегралы (4.9). Тогда, рассуждая так же, как и выше, из (4.10) получаем (4.11). •

Установленное свойство называется *аддитивность кратного интеграла Римана по множествам.* Далее рассмотрим взаимосвязь понятия интегрируемости и араифметических операций:

Теорема 4.3 *Пусть функции $f, g \in \mathcal{R}(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$–измеримое множество. Тогда функции $f + g$, $f \cdot g \in \mathcal{R}(\Omega)$, причем*

$$\int\limits_{\Omega} (f+g)(x)dx = \int\limits_{\Omega} f(x)dx + \int\limits_{\Omega} g(x)dx\,, \tag{4.12}$$

$$\int\limits_{\Omega} \lambda f(x)dx = \lambda \int\limits_{\Omega} f(x)dx \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}\,. \tag{4.13}$$

Если вдобавок $g(x) \geq \alpha > 0 \ \ \forall\, x \in \overline{\Omega}$, то $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{R}(\Omega)$.

∘ Построим сумму Римана для функции $f+g$

$$\sigma_r(f+g)=\sum_k (f+g)(\xi_k)\mu(\Omega_k)=$$

$$=\sum_k f(\xi_k)\mu(\Omega_k)+\sum_k g(\xi_k)\mu(\Omega_k)=\sigma_r(f)+\sigma_r(g)\,.$$

Поскольку

$$\lim_{\delta_r\to 0}\sigma_r(f)=\int\limits_{\Omega} f(x)dx,\qquad \lim_{\delta_r\to 0}\sigma_r(g)=\int\limits_{\Omega} g(x)dx,$$

то

$$\lim_{\delta_r\to 0}\sigma_r(f+g)=\int\limits_{\Omega}(f+g)(x)dx.$$

Отсюда следует, что функция $f+g\in\mathcal{R}(\Omega)$, причем имеет место (4.12). Доказательство соотношения (4.13) предоставляется в качестве **упражнения**.

Доказательство интегрируемости произведения и частного двух интегрируемых функций неизмеримо труднее. Поэтому для простоты мы ограничимся случаем *непрерывных на* $\overline{\Omega}$ *функций* f и g.

Итак, пусть функции $f,g\in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Тогда их произведение fg и частное $\dfrac{f}{g}$ тоже непрерывны на $\overline{\Omega}$. Поэтому утверждение следует из достаточного условия существования кратного интеграла Римана. •

Все взаимосвязи понятия кратного интеграла и неравенсв имеют прообразы в одномерном случае. Поэтому доказательства некоторых теорем будут предложены в качестве упражнений.

Теорема 4.4 *Пусть функция* $f\in\mathcal{R}(\Omega)$, *причем* $f(x)\geq 0$ $\forall\, x\in\Omega$, *где* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$*–измеримое множество. Тогда*

$$\int\limits_{\Omega} f(x)dx\geq 0.$$

Следствие 4.1 *Пусть функции $f, g \in \mathcal{R}(\Omega)$, причем $f(x) \geq g(x)\ \forall\, x \in \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$–измеримое множество. Тогда*

$$\int\limits_{\Omega} f(x)dx \geq \int\limits_{\Omega} g(x)dx.$$

Упражнение 4.1 Доказать теорему 4.4 и следствие 4.1

Теорема 4.5 *Пусть функция $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$–измеримое множество. Тогда фукция $|f| \in \mathcal{R}(\Omega)$, причем*

$$\left|\int\limits_{\Omega} f(x)dx\right| \leq \int\limits_{\Omega} |f(x)|dx.$$

Упражнение 4.2 Доказать теорему 4.5 в предположении, что функция $f \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$.

Теорема 4.6 *Пусть функции $f, g \in \mathcal{R}(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$–измеримое множество, причем функция g знакопостоянна на Ω и*

$$\int\limits_{\Omega} g(x)dx \neq 0.$$

Тогда существует $\gamma \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\int\limits_{\Omega} fg dx = \gamma \int\limits_{\Omega} g(x)dx.$$

$\circ$ По необходимому условию интегрируемости функция f ограничена, т. е.

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall\, x \in \Omega,$$

где $m, M \in \mathbb{R}$. Пусть для определенности $g(x) > 0\ \forall\ x \in \Omega$. Тогда

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Из следствия 4.4 вытекает, что

$$m\int\limits_{\Omega} g(x)dx \leq \int\limits_{\Omega} fg(x)dx \leq M\int\limits_{\Omega} g(x)dx.$$

Положим
$$\frac{\int\limits_{\Omega} fg(x)dx}{\int\limits_{\Omega} g(x)dx} = \gamma\,. \tag{4.14}$$
Тогда утверждение теоремы доказано, причем $\gamma \in [m, M]$. •

Следствие 4.2 *Пусть в предположениях теоремы 4.5 функция $f \in \mathrm{C}(\Omega)$. Тогда существует точка $\xi \in \Omega$, что*
$$\int\limits_{\Omega} g(x)f(x)dx = f(\xi)\int\limits_{\Omega} g(x)dx.$$

○ Поскольку функция $f \in \mathrm{C}(\Omega)$, то по теореме Больцано-Коши о промежуточном значении найдется точка $\xi \in \Omega$ такая, что $f(\xi) = \gamma$, где число $\gamma \in [m, M]$ определено в (4.14). •

Теорема 4.6 вместе со следствием 4.2 в математической литературе носит название *конечномерной теоремы о среднем.*

Теперь рассмотрим вопрос о замене переменных в кратном интеграле.

Теорема 4.7 *Пусть $\Omega_x \subset \mathbb{R}^n_x$ и $\Omega_y \subset \mathbb{R}^n_y$–два открытых измеримых множества. Пусть $\varphi \in C^1(\Omega_x, \Omega_y)$– биективная вектор-функция, причем якобиан $\det J_\varphi(x) \neq 0$ при любом $x \in \Omega_x$ и непрерывно продолжаем на $\partial\Omega_x$. Тогда, если функция $f \in \mathrm{C}(\overline{\Omega}_y)$, то и функция $(f \circ \varphi)|\det J_\varphi| \in \mathrm{C}(\overline{\Omega}_x)$, причем*
$$\int\limits_{\Omega_y} f(x)dy = \int\limits_{\Omega_x} f(\varphi(x))|\det J_\varphi|dx.$$

○ В силу теоремы ?? вектор-функция $\varphi : \Omega_x \to \Omega_y$– локальный диффеоморфизм. Покроем область Ω_x сеткой, состоящей из прямоугольников с ребром h.

Часть сетки, содержащаяся в Ω_x, при действии диффеоморфизма φ перейдет в криволинейную сетку поверхностей, разбивающую $\Omega_y = \varphi[\Omega_x]$ на измеримые множества. При этом, если

$h \to 0$, то мелкость разбиения Ω_y стремится к нулю в силу теоремы ??. Воспользовавшись этой теоремой, представим

$$\sum_k f(\eta_k)\mu(\varphi[\Omega_k]) = \sum_k f(\varphi(\xi_k))(|\mathrm{det} J_\varphi(\xi_k)|\mu(\Omega_k) + \widetilde{o}(h^n)),$$

где $\Omega_k \subset \Omega_x$–прямоугольник с ребром h, а $\varphi(\xi_k) = \eta_k,\ \xi_k \in \Omega_k$. Поскольку функция $f \in \mathrm{C}(\overline{\Omega}_y)$, то

$$|\sum_k f(\varphi(\xi_k))\widetilde{o}(h^n)| \le \sum_k |f(\eta_k)|\widetilde{o}(h^n) \le Mm\widetilde{o}(h^n),$$

где $M = \max\limits_{y=\in\Omega_y} f(y)$, а m–число множеств $\varphi[\Omega_k]$, имеющих непустое пересечение с Ω_y. Заметим теперь, что

$$m\widetilde{o}(h^n) \to 0 \qquad h \to 0\,, \tag{4.15}$$

поэтому

$$\lim_{h\to 0} \sum_k f(\eta_k)\mu(\varphi[\Omega_k]) = \int\limits_{\Omega_y} f(y)dy.$$

Но тогда, очевидно, существует и равный этому интеграл

$$\lim_{h\to 0} \sum_k f(\varphi(\xi_k))|\mathrm{det} J_\varphi(\xi_k)|\mu(\Omega_k) = \int\limits_{\Omega_x} f(\varphi(x))|\mathrm{det} J_\varphi(x)|dx.$$

•

Упражнение 4.3 Доказать (ref648).

5 Повторный интеграл Римана

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}$–область, граница которой $\partial\Omega$ состоит из графиков непрерывных функций $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, $\psi(x) \ge \varphi(x)$, где $x \in [a, b]$, и, может быть, отрезков прямых $x = a$ и $x = b$. Область Ω в дальнейшем будем называть *элементарной относительно оси OY*.

Пусть функция $f \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$, тогда при любом фиксированном $x \in [a,b]$ функция $f(x,\cdot) \in \mathrm{C}([\varphi(x),\psi(x)])$. Отсюда в силу достаточного условия интегрируемости существует интеграл

$$\mathrm{F}(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy.$$

Лемма 5.1 *Пусть область* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *элементарна относительно оси* OY*, а функция* $f \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$*. Тогда функция* $\mathrm{F} \in \mathrm{C}([a,b])$*.*

$\circ$ Поскольку функция f непрерывна на компакте $\overline{\Omega}$, то она ограничена на нем, т. е.

$$\exists\, M \in \mathbb{R} \quad \forall\, (x,y) \in \overline{\Omega} \quad (|f(x,y)| \le M).$$

Фиксируем точки $x, x+\Delta x \in [a,b]$. Обозначим

$$\Delta\varphi = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x), \qquad \Delta\psi = \psi(x+\Delta x) - \psi(x),$$

причем считаем для определенности, что

$$\psi(x) - \varphi(x) \ge \Delta\varphi \ge 0, \qquad \Delta\psi \ge 0\,. \tag{5.16}$$

Рассмотрим разность

$$|\mathrm{F}(x+\Delta x) - \mathrm{F}(x)| =$$

$$= \left| \int\limits_{\varphi(x+\Delta x)}^{\psi(x+\Delta x)} f(x+\Delta x,y)dy - \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\varphi(x)+\Delta\varphi}^{\psi(x)} f(x+\Delta x,y)dy + \int\limits_{\psi(x)}^{\psi(x)+\Delta\psi} f(x+\Delta x,y)dy - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\varphi(x)}^{\varphi(x)+\Delta\varphi} f(x,y)dy - - \int\limits_{\varphi(x)+\Delta\varphi}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right| \le$$

$$\leq \int\limits_{\varphi(x)+\Delta\varphi}^{\psi(x)} |f(x+\Delta x, y) - f(x,y)|dy + + \int\limits_{\psi(x)}^{\psi(x)+\Delta\psi} |f(x+\Delta x, y)|dy +$$

$$+ \int\limits_{\varphi(x)}^{\varphi(x)+\Delta\varphi} |f(x,y)dy| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\varphi(x)+\Delta\varphi}^{\psi(x)} |f(x+\Delta x, y) - f(x,y)|dy + M(\Delta\psi + \Delta\varphi)\,. \quad (5.17)$$

В силу непрерывности функций φ и ψ на $[a, b]$ и равномерной непрерывности функции f на $\overline{\Omega}$ имеем

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; (|\Delta x| < \delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\Delta\varphi < \varepsilon) \wedge (|f(x+\Delta x, y) - f(x,y)| < \varepsilon$$

независимо от y, поэтому из (5.17) получаем при фиксированном $\varepsilon > 0$ и достаточно малом $\delta > 0$, что из $|\Delta x| < \delta$ вытекает

$$|\mathrm{F}(x+\Delta x) - \mathrm{F}(x)| \leq \varepsilon[\max_{x\in[a,b]}(\psi(x) - \varphi(x+\Delta x)) + 2M] \leq$$

$$\leq \varepsilon(\mathrm{diam}\Omega + 2M)\,.$$

Отсюда непосредственно следует утверждение леммы. •

Упражнение 5.1 Показать, что ограничения (5.16) несущественны для доказательства леммы 5.1.

Итак, в силу леммы 5.1 функция

$$F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$

непрерывна на $[a, b]$. Поэтому в силу достаточного условия интегрируемости существует интеграл

$$\int\limits_a^b F(x)dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx,$$

который принято записывать в виде

$$\int\limits_a^b F dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\,. \tag{5.18}$$

Интеграл (5.18) называется *повторным интегралом Римана* от функции f по области Ω.

Как следует из теорем ?? и ??, область Ω–измеримое множество, а если функция $f \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$, то в силу теоремы 2.2 существует кратный интеграл Римана

$$\int\!\!\int\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy.$$

Связь между повторным и кратным интегралами Римана устанавливает следующая

Теорема 5.1 *Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ элементарна относительно оси OY, а функция $f \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Тогда*

$$\int\!\!\int\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy.$$

$\circ$ Пусть $k \in \mathbb{N}$. Построим вспомогательное множество функций на отрезке $[a, b]$.

$$\begin{gathered}
\varphi_0(x) = \varphi(x), \\
\varphi_1(x) = \varphi(x) + \frac{1}{k}(\psi(x) - \varphi(x)), \\
\dots \\
\varphi_j(x) = \varphi(x) + \frac{i}{j}(\psi(x) - \varphi(x)), \\
\dots \\
\varphi_k(x) = \varphi(x) + \frac{k}{k}(\psi(x) - \varphi(x)) = \psi(x).
\end{gathered}$$

Очевидно, $\varphi(x) \le \varphi_j(x) \le \varphi_{j+i}(x) \le \psi(x)$ при любом $x \in [a, b]$ и $0 \le j, j+i \le k$, причем $\varphi_j \in \mathrm{C}([a, b]) \quad j = 1, 2, ..., k-1$.

Разобьем область Ω следующим образом. Пусть $r_k = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^k$ разбиение отрезка $[a, b]$ на k равных частей $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{k} \quad i = 1, 2, ..., k$. Положим

$$\Omega_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_{i-1} < x < x_i, \;\; \varphi_{j-1}(x) < y < \varphi_j(x)\}.$$

Очевидно, $r_k^* = \{\Omega_{ij}\}_{i,j=1}^k$ есть разбиение области Ω.

Рассмотрим

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy = \sum_{i=1}^k \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy =$$

$$= \sum_{i=1}^k \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx \sum_{j=1}^k \int\limits_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y) dy = \sum_{i,j=1}^k \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int\limits_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y) dy \,.$$

Положим

$$m_{ij} = \min_{(x,y) \in \overline{\Omega}_{ij}} f(x, y), \qquad M_{ij} = \max_{(x,y) \in \overline{\Omega}_{ij}} f(x, y).$$

Имеем

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int\limits_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y) dy \le M_{ij} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int\limits_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} dy = M_{ij} \mu(\Omega_{ij}) \,. \tag{5.19}$$

Аналогично

$$m_{ij}\mu(\Omega_{ij}) \leq \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int\limits_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)dy\,. \tag{5.20}$$

Поскольку функция $f \in \mathrm{C}(\overline{\Omega}_{ij})$, то по теореме Вейерштрасса существуют точки $\xi_{ij}, \xi'_{ij} \in \overline{\Omega}_{ij}$ такие, что $f(\xi_{ij}) = m_{ij}$, $f(\xi'_{ij}) = M_{ij}$. Построим суммы Римана

$$\underline{\sigma}_{r_k^*} = \sum_{i,j=1}^{k} f(\xi_{ij})\mu(\Omega_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{k} m_{ij}\mu(\Omega_{ij}),$$

$$\overline{\sigma}_{r_k^*} = \sum_{i,j=1}^{k} f(\xi'_{ij})\mu(\Omega_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{k} M_{ij}\mu(\Omega_{ij}),$$

В силу достаточного условия интегрируемости имеем

$$\lim_{k\to\infty} \underline{\sigma}_{r_k^*} = \lim_{k\to\infty} \overline{\sigma}_{r_k^*} = \int\limits_{\Omega}\int f(x,y)dy\,. \tag{5.21}$$

С другой стороны, из (5.19) и (5.20) получаем

$$\underline{\sigma}_{r_k^*} \leq \sum_{i,j=1}^{k} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int\limits_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)dy \leq \overline{\sigma}_{r_k^*}.$$

Отсюда в виду (5.21) вытекает утверждение теоремы. •

Упражнение 5.2 Показать, что

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \int\limits_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)dy = \mu(\Omega_{ij})$$

(см. (5.19) в доказательстве теоремы).

Сделаем теперь обобщение на конечномерный случай. Пусть $\mathbb{R}^{n-1}$– подпространство $x^n = 0$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω_{x^n}–проекция области Ω на подпространство $\mathbb{R}^{n-1}$.

Определение 5.1 Область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется *элементарной по оси* Ox^n, если ее проекция $\Omega_{x^n} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ измерима по Жордану, а граница $\partial\Omega$ состоит из графиков двух непрерывных на $\overline{\Omega}_{x^n}$ функций $x^n = \varphi(x^1, x^2, ..., x^{n-1})$, $x^n = \psi(x^1, x^2, ..., x^{n-1})$, причем $\psi(x^1, x^2, ..., x^{n-1}) \geq \varphi(x^1, x^2, ..., x^{n-1})$ при $(x^1, x^2, ..., x^{n-1}) \in \Omega_{x^n}$ и, быть может, части цилиндра, основанием которого является граница $\partial\Omega_{x^n}$ множества Ω_{x^n}.

Заметим, что область Ω элементарна относительно оси Ox^n, то она измерима, поскольку ее граница $\partial\Omega$ из графиков непрерывных функций и, следовательно, имеет меру нуль.

Теорема 5.2 *Пусть область* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *элементарна относительно оси* Ox^n*, ее проекция* Ω_{x^n}*–измеримое множество, а функция* $f \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$*. Тогда*

$$\overbrace{\int\int_{\Omega}...\int}^{n} f(x^1, x^2, ..., x^n)dx^1dx^2...dx^n =$$

$$\overbrace{\int\int_{\Omega_x}...\int}^{n-1} dx^1dx^2...dx^{n-1} \int\limits_{\varphi(x^1,x^2,...,x^{n-1})}^{\psi(x^1,x^2,...,x^{n-1})} f(x^1, x^2, ..., x^n)dx^n\,. \tag{5.22}$$

Доказательство этой теоремы в идейном смысле мало отличается от доказательства теоремы 5.1, зато гораздо более сложно в техническом отношении. Поэтому оно опускается.

Далее, пусть и область Ω_{x^n} удовлетворяет условиям теоремы 5.2. Тогда получившийся в (5.22) $(n-1)$–кратный интеграл можно свести к однократному и $(n-2)$– кратному интегралам. Продолжая, если возможно, этот процесс далее, мы придем к формуле

$$\overbrace{\int\int\ldots\int}^{n}_{\Omega} f(x^1,x^2,...,x^n)dx^1dx^2...dx^n = \int\limits_a^b dx^1 \int\limits_{\varphi_{n-1}(x^1)}^{\psi_{n-1}(x^1)} dx^2 \ldots \int\limits_{\varphi_1(x^1,x^2,...,x^{n-1})}^{\psi_1(x^1,x^2,...,x^{n-1})} f(x^1,x^2,...,x^n)dx^n\,. \tag{5.23}$$

Таким образом, доказано

Следствие 5.1 *Пусть области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $\Omega_{x^n}\subset\mathbb{R}^n$, $\Omega_{x^n,x^{n-1}}\subset\mathbb{R}^{n-2}$, ..., $\Omega_{x^n,x^{n-1},...,x^2}\subset\mathbf{R}$ элементарны относительно осей Ox^n, Ox^{n-1}, Ox^{n-2}, ..., Ox^1 соответственно. Тогда справедлива формула (5.23).*

Определение 5.2 Стоящий в правой части формулы (5.23) интеграл называется *повторным интегралом Римана.*

6 Определение и свойства несобственного кратного интеграла

Определение 6.1 Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$–открытое множество. Последовательность $\{\Omega_k\}$ открытых множеств называется *последовательностью, монотонно исчерпывающей множество* Ω, если

(i) $\overline{\Omega}_k\subset\Omega_{k+1}\quad k=1,2,\ldots;$

(ii) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Omega_k=\Omega.$

Пример 6.1 Приведем последовательности, монотонно исчерпывающие множество $\mathbb{R}^2$.

а) $\Omega_k=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<k^2\}$–последовательность кругов радиуса k с центром в точке $(0,0)$;

б) $\Omega_k=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|<k,\ \ |y|<k\}$–последовательность квадратов со сторонами, параллельными осям координат.

Определение 6.2 Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$–открытое множество, а функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Пусть для любого открытого измеримого подмножества $\overline{\Omega}' \subset \Omega$ функция $f \in \mathcal{R}(\Omega')$. Функция f называется *интегрируемой в несобственном смысле* на Ω, если для любой последовательности открытых измеримых множеств $\{\Omega_k\}$, монотонно исчерпывающих множество Ω, существует конечный предел

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_k} f(x)dx = \int\limits_{\Omega} f(x)dx\,, \tag{6.24}$$

не зависящий от выбора указанной последовательности. Этот предел называется *несобственным интегралом* от функции f по множеству Ω. Если предел (6.24) существует, то говорят также, что несобственный *интеграл сходится*, а в противном случае — *расходится.*

Упражнение 6.1 Пусть открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ измеримо, и функция $f \in \mathcal{R}(\Omega)$. Показать, что в этом случае кратный интеграл Римана и несобственный кратный интеграл совпадают.

Упражнение 6.2 Сформулировать и доказать следующие свойства:

(i) аддитивность несобственного интеграла по множествам;

(ii) линейность и однородность несобственного интеграла (формулы (4.12) и (4.13)).

Упражнение 6.3 Сформулировать и доказать теорему о замене переменных в несобственном кратном интеграле.

Замечание 6.1 Как будет показано ниже, свойства несобственного кратного интеграла в случае $n \geq 2$ разительно отличаются от свойств несобственного интеграла Римана. Поэтому мы будем использовать определение 6.2 только в случае $n \geq 2$.

7 Несобственные кратные интегралы от неотрицательных функций

Теорема 7.1 *Пусть функция f неотрицательна на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и интегрируема на любом измеримом подмножестве $\Omega' \subset \Omega$. Тогда независимо от выбора последовательности $\{\Omega_k\}$ измеримых открытых множеств, монотонно исчерпывающих множество Ω, интеграл*

$$\int\limits_{\Omega} f(x)dx$$

либо сходится, либо предел

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_k} f(x)dx = +\infty.$$

$\circ$ Пусть $\{\Omega_k\}$–некоторая последовательность открытых измеримых множеств, монотонно исчерпывающих множество Ω. Тогда в силу неотрицательности функции f имеем

$$\int\limits_{\Omega_k} f(x)dx \leq \int\limits_{\Omega_{k+1}} f(x)dx.$$

Поэтому в силу критерия Вейерштрасса всегда существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_k} f(x)dx = I.$$

Теперь пусть $\{\Omega'_k\}$–какая-нибудь другая последовательность открытых измеримых множеств, монотонно исчерпывающая множество Ω. В силу предыдущего существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega'_k} f(x)dx = I'.$$

Покажем, что $I = I'$.

Для любого фиксированного Ω_k существует номер $l = l(k)$ такой, что $\overline{\Omega}_k \subset \Omega'_l$. Действительно, $\overline{\Omega}_k$– компакт и $\overline{\Omega}_k \subset \Omega$. Нетрудно заметить, что последовательность $\{\Omega'_k\}$ образует открытое покрытие множества Ω_k. Значит, существует конечное подпокрытие $\Omega'_{k_1}, \Omega'_{k_2}, \dots, \Omega'_{k_l}$ множества Ω_k. Поскольку $\{\Omega'_k\}$– монотонная последовательность, то $\Omega'_{k_i} \subset \Omega'_l$, где $l = \max\{k_1, k_2, \dots, k_l\}$.

Далее, в силу неотрицательности функции f имеем

$$\int\limits_{\Omega_k} f(x)dx \leq \int\limits_{\Omega'_k} f(x)dx \leq I'.$$

Переходя к пределу по $k \to \infty$, получим $I \leq I'$. Поменяв местами Ω'_k и Ω_k в предыдущем рассуждении, получим $I' \leq I$. •

Доказанная теорема позволяет при вычислении несобственных интегралов от неотрицательных функций ограничиться подбором только одной последовательности $\{\Omega_k\}$ открытых измеримых множеств, монотонно исчерпывающих множество Ω.

Пример 7.1 Вычислить *интеграл Пуассона*[16]

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Имеем

$$(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy.$$

Положим $\Omega_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < k^2\}$ $k = 1, 2, \dots$. Это последовательность измеримых множеств, монотонно исчерпывающая всю плоскость $\mathbf{R^2}$. Рассмотрим интеграл

$$\int\int\limits_{\Omega_k} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = I_k.$$

---

[16]Симеон Дени Пуассон (1781-1840)–французский математик, механик и физик, один из основоположников математической физики.

Применим диффеоморфизм

$$\varphi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Получим

$$I_k = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{k} e^{-\rho^2}\rho d\rho = 2\pi \frac{e^{-\rho^2}}{2}\Bigg|_0^k = 2\pi(1 - e^{-k^2}).$$

Отсюда находим $\lim\limits_{k\to\infty} I_k = \pi$. Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

Теорема 7.2 *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$–открытое множество, функции $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ интегрируемы на любом измеримом подмножестве $\Omega' \subset \Omega$ и таковы, что $0 \le f(x) \le g(x) \ \ \forall\, x \in \Omega$. Тогда из скорости сходимости интеграла*

$$\int\limits_{\Omega} g(x)dx \tag{7.25}$$

следует сходимость интеграла

$$\int\limits_{\Omega} f(x)dx\,, \tag{7.26}$$

а из расходимости интеграла (7.26) следует расходимость интеграла (7.25).

Упражнение 7.1 Доказать теорему **??**.

Теорема **??** носит название *теоремы сравнения* для несобственных кратных интегралов. От нее самой мало проку, поэтому в качестве эталонов для сравнения с другими интегралами рассмотрим интегралы

$$I_1 = \iiint\limits_{(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2>1} \frac{dx^1dx^2\ldots dx^n}{\left(\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2}\right)^{\alpha}},$$

$$I_2 = \iiint\limits_{(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2<1} \frac{dx^1dx^2\ldots dx^n}{\left(\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2}\right)^\alpha}.$$

Теорема 7.3 *Интеграл I_1 сходится, если $\alpha > n$, и расходится в противном случае. Интеграл I_2 сходится, если $\alpha < n$, и расходится в противном случае.*

○ Рассмотрим вектор-функцию

$$\varphi : \begin{pmatrix} \rho \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_i \\ \vdots \\ \theta_{n-1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \rho\cos\theta_{n-1}\cos\theta_{n-2}\ldots\cos\theta_2\cos\theta_1 \\ \rho\cos\theta_{n-1}\cos\theta_{n-2}\ldots\cos\theta_2\sin\theta_1 \\ \rho\cos\theta_{n-1}\cos\theta_{n-2}\ldots\cos\theta_3\sin\theta_2 \\ \ldots \\ \rho\cos\theta_{n-1}\cos\theta_{n-2}\ldots\cos\theta_i\sin\theta_{i-1} \\ \ldots \\ \rho\sin\theta_{n-1} \end{pmatrix},$$

отображающую $\overline{\mathbb{R}}_+ \times [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \times \ldots \times [-\pi/2, \pi/2]$ в $\mathbb{R}^n$. Как нетрудно видеть,

$$\rho = \sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2}\,, \tag{7.27}$$

$$\det J_\varphi = \rho^{n-1}\cos\theta_2\cos^2\theta_3\ldots\cos^{n-2}\theta_{n-2}\,. \tag{7.28}$$

Исследуем сначала сходимость интеграла I_1. В качестве последовательности $\{\Omega_k\}$ измеримых открытых множеств, монотонно исчерпывающих множество $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_n > 1\}$ возьмем множества $\Omega_k = \{(\rho, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) : 1 < \rho < k\}$. Рассмотрим интеграл I_1.

$$\iint\limits_{\Omega_k}\ldots\int \frac{dx^1dx^2\ldots dx^n}{\left(\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2}\right)^\alpha} =$$

$$= \int\limits_1^k \rho^{n-1-\alpha}d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\theta_1 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta_2 d\theta_2 \ldots \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-2}\theta_{n-2}d\theta_{n-2} =$$

$$= c\int\limits_1^k \rho^{n-1-\alpha}d\rho = \frac{c}{n-2}(k^{n-\alpha}),$$

где

$$c = \int\limits_0^{2\pi} d\theta_1 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta_2 d\theta_2 \ldots \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-2}\theta_{n-2}d\theta_{n-2} > 0.$$

Поэтому интеграл I_1 сходится, если $\alpha > n$, и расходится в противном случае.

Рассмотрим теперь интеграл I_2. В качестве последовательности $\{\Omega_k\}$ возьмем последовательность $\Omega_k = \{(\rho, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}) : k^{-1} < \rho < 1\}$. Рассуждая, как выше, получим

$$\int\int\limits_{\Omega_k}\ldots\int \frac{dx^1dx^2\ldots dx^n}{\left(\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2}\right)^\alpha} =$$

$$= c\int\limits_{\frac{1}{k}}^1 \rho^{n-1-\alpha}d\rho = \frac{c}{n-\alpha}(1-\left(\frac{1}{k}\right)^{n-\alpha}).$$

Поэтому интеграл I_2 сходится, если $\alpha < n$ и расходится в противном случае. •

Упражнение 7.2 Доказать соотношение (7.27) и (7.28).

8 Несобственные кратные интегралы от знакопеременных функций

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая область, а $f : \Omega \to \mathbb{R}$ — некоторая функция такая, что $f \in \mathcal{R}(\Omega')$ при любом измеримом множестве $\Omega' \subset \Omega$.

Определение 8.1 Несобственный кратный интеграл $\int\limits_\Omega f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int\limits_\Omega |f(x)|dx$.

Введем некоторые полезные в дальнейшем понятия.

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0; \\ 0, & f(x) < 0; \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) < 0; \\ 0, & f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Упражнение 8.1 Показать, что

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2};$$
$$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)|, \quad 0 \leq f_-(x) \leq |f(x)|;$$
$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \quad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x).$$

Упражнение 8.2 Доказать, что интеграл $\int\limits_{\Omega} f(x)dx$ абсолютно сходится точно тогда, когда сходятся интегралы $\int\limits_{\Omega} f_+(x)dx$ и $\int\limits_{\Omega} f_-(x)dx$.

Упражнение 8.3 Доказать, что из абсолютной сходимости несобственного кратного интеграла следует его сходимость.

Сформулируем и докажем довольно неожиданный результат, который в действительности есть прямое следствие определения 6.2.

Теорема 8.1 *Если несобственный кратный интеграл сходится, то он и абсолютно сходится.*

$\circ$ Пусть несобственный кратный интеграл абсолютно расходится. В силу теоремы 7.2 существует последовательность $\{\Omega_k\}$

открытых измеримых множеств монотонно исчерпывающих множество Ω такая, что

$$\int\limits_{\Omega_{k+1}} |f(x)|dx > 3\int\limits_{\Omega_k} |f(x)|dx + 2k\,. \tag{8.29}$$

Положим $A_k = \Omega_{k+1} \setminus \overline{\Omega}_k$. Множество A_k открыто и измеримо, поэтому

$$\int\limits_{A_k} |f(x)|dx + \int\limits_{\Omega_k} |f(x)|dx = \int\limits_{\Omega_{k+1}} |f(x)|dx.$$

Отсюда и из (8.29) вытекает, что

$$\int\limits_{A_k} |f(x)|dx > 2(\int\limits_{\Omega_k} |f(x)|dx + k)\,. \tag{8.30}$$

Не теряя общности, можно считать, что

$$\int\limits_{A_k} f_+(x)dx \geq \int\limits_{A_k} f_-(x)dx.$$

Поэтому в силу (8.30) имеем

$$2\int\limits_{A_k} f_+(x)dx \geq \int\limits_{A_k} |f(x)|dx > 2(\int\limits_{\Omega_k} |f(x)|dx + k).$$

Отсюда получим, что

$$\int\limits_{A_k} f_+(x)dx > \int\limits_{\Omega_k} |f(x)|dx + k.$$

Это значит, что для любого достаточно мелкого разбиения $r = \{A_{ki}\}$ множества A_k и любой суммы Римана имеем

$$\sum_i f_+(\xi_i)\mu(A_{ki}) > \int\limits_{\Omega_k} |f(x)|dx + k\,. \tag{8.31}$$

Обозначим через A^*_{ki} те множества $A_{ki} \in r$, для которых $f_+(\xi) > 0 \ \forall \, \xi \in A^*_{ki}$. Тогда, выбирая $\xi_i \in A_{ki} \neq A^*_{ki}$ так, чтобы $f_+(\xi_i) = 0$ из (8.31) получим

$$\sum_i f(\xi_i)\mu(A^*_{ki}) > \int\limits_{\Omega_k} |f(x)|dx + k\,. \tag{8.32}$$

Положим $B_k = \cup_i A^*_{ki}$. Очевидно, $B_k \subset A_k$–открытое измеримое множество, а $r^* = \{A^*_{ki}\}$–его разбиение. Переходя в неравенстве (8.32) к пределу, получим

$$\int\limits_{B_k} f(x)dx \geq \int\limits_{\Omega_k} |f(x)|dx + k\,. \tag{8.33}$$

Очевидно, что

$$\int\limits_{\Omega_k} f(x)dx \geq -\int\limits_{\Omega_k} |f(x)|dx.$$

Поэтому из (8.33) получим

$$\int\limits_{B_k} f(x)dx + \int\limits_{\Omega_k} f(x)dx \geq k\,. \tag{8.34}$$

Положим $\Omega'_k = B_k \cup \Omega_k$. Очевидно, Ω'_k–открытое измеримое множество и $\Omega_k \subset \Omega'_k \subset \Omega_{k+1}$, т. е. последовательность $\{\Omega'_k\}$ монотонно исчерпывает множество Ω. Поскольку $B_k \cap \Omega_k = \varnothing$ по построению, то из (8.34) вытекает, что

$$\int\limits_{\Omega'_k} f(x)dx \geq k,$$

т. е. интеграл $\int\limits_{\Omega} f(x)dx$ расходится. •

Замечание 8.1 Если бы в определении 6.2 мы в качестве последовательности $\{\Omega_k\}$ выбрали бы последовательность, состоящую из пересечений открытых шаров радиуса k со множеством Ω, то теорема 8.1 была бы неверна. Возможность произвола в выборе последовательности $\{\Omega_k\}$ решительно отличает свойства несобственного кратного интеграла от свойств несобственного интеграла.

7 ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ РИМАНА

Тут и корова не удержалась бы
от смеха, глядя, какие штуки
откалывает наш старый дурак.
Марк Твен.
"Приключения Гекельберри Финна"

1 Определение и свойства поверхностного интеграла первого рода

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ — измеримая по Жордану область, $\varphi : \Omega \to S$ — диффеоморфизм области Ω на k-мерную поверхность $S \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq k$, $f : S \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Рассмотрим кратный интеграл Риммана

$$\int\limits_{\Omega} f \circ \varphi(t) \sqrt{\det G_{\varphi}(t)} dt \,. \tag{1.1}$$

Определение 1.1 Интеграл (1.1) называется *поверхностным интегралом первого рода* от функции f по поверхности S и обозначается

$$\int\limits_{S} f dS \,.$$

Наше определение поверхностного интеграла зависит от диффеоморфизма φ. Поэтому, чтобы определение было корректным, необходимо установить независимость (1.1) от диффеоморфизма.

Теорема 1.1 *Пусть $\Omega_t \subset \mathbb{R}^k_t$ и $\Omega_\tau \subset \mathbb{R}^k_\tau$ — две измеримые по Жордану области, $\varphi : \Omega_t \to S$ и $\psi : \Omega_\tau \to S$ — два изоморфизма этих областей на k-мерную поверхность $S \subset \mathbb{R}^n$, $f : S \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда*

$$\int\limits_{\Omega_t} f \circ \varphi(t) \sqrt{\det G_{\varphi}(t)} dt = \int\limits_{\Omega_\tau} f \circ \psi(\tau) \sqrt{\det G_{\psi}(\tau)} d\tau \,.$$

◦ Заметим, что

$$G_\varphi = J_\varphi^* \cdot J_\varphi = J_\varphi^* \cdot (J_\psi^{-1})^* \cdot J_\psi^* \cdot J_\psi \cdot (J_\psi^{-1}) \cdot J_\varphi =$$

$$= (J_\psi^{-1} \cdot J_\varphi)^* G_\psi (J_\psi^{-1} J_\varphi)\,.$$

Здесь мы воспользовались общеизвестным фактом, а именно: $(AB)^* = B^* A^*$ для любых двух прямоугольных матриц A и B, для которых определено умножение.

Поскольку $J_\psi^{-1} = J_{\psi^{-1}}$ и $J_{\psi^{-1}} \cdot J_\varphi = J_{\psi^{-1}\circ\varphi}$, то

$$G_\varphi = (J_{\psi^{-1}\circ\varphi})^* G_\psi (J_{\psi^{-1}\circ\varphi})\,,$$

$$\det G_\varphi = (\det J_{\psi^{-1}\circ\varphi})^2 \det G_\psi\,,$$

где $J_{\psi^{-1}\circ\varphi}$ — матрица Якоби диффеоморфизма $\psi^{-1}\circ\varphi : \Omega_t \to \Omega_\tau$.

Теперь воспользуемся теоремой о замене переменных в кратном интеграле Римана

$$\int\limits_{\Omega_t} (f\circ\varphi)(t)\sqrt{\det G_\varphi(t)}dt =$$

$$\int\limits_{\Omega_\tau} (f\circ\varphi\circ(\varphi^{-1}\circ\psi))(\tau)\,|\det J_{\varphi^{-1}\circ\psi}|\,|\det J_{\psi^{-1}\circ\varphi}|\,\sqrt{\det G_\psi(\tau)}d\tau\,.$$

Поскольку $J_{\varphi^{-1}\circ\psi} = (J_{\psi^{-1}\circ\varphi})^{-1}$, то отсюда сразу вытекает требуемое. •

Итак, корректнсть определения 1.1 установлена. Перейдем к расмотрению основных свойств поверхностного интеграла.

Теорема 1.2 *Пусть k-мерная поверхность $S \subset \mathbb{R}^n$ имеет вид $S = S_1 \cup S_2$, где $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Пусть задана непрерывная функция $f : S \to \mathbb{R}$. Тогда*

$$\int\limits_S f dS = \int\limits_{S_1} f dS + \int\limits_{S_2} f dS\,.$$

∘ Пусть $\varphi : \Omega \to S$ — диффеоморфизм открытой измеримой области $\Omega \subset \mathbb{R}^k$. В силу свойств диффеоморфизма область Ω имеет вид $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, причем $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Поэтому

$$\int\limits_S f dS = \int\limits_{S_1 \cup S_2} f dS = \int\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f \circ \varphi(t) \sqrt{\det G_\varphi(t)} dt =$$

$$= \int\limits_{\Omega_1} f \circ \varphi(t) \sqrt{\det G_\varphi(t)} dt + \int\limits_{\Omega_2} f \circ \varphi(t) \sqrt{\det G_\varphi(t)} dt =$$

$$= \int\limits_{S_1} f dS + \int\limits_{S_2} f dS \,. \bullet$$

Теорема 1.3 *Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ — k-мерная поверхность диффеоморфная измеримой области $\Omega \subset \mathbb{R}^k$. Пусть функции $f, g : S \to \mathbb{R}$ непрерывны. Тогда*

$$\int\limits_S (\alpha f + \beta g) dS = \alpha \int\limits_S f dS + \beta \int\limits_S g dS \,,$$

при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Теорема 1.4 *Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ — k-мерная поверхность диффеоморфная измеримой области $\Omega \subset \mathbb{R}^k$. Пусть функция $f : S \to \mathbb{R}$ непрерывны. Тогда*

$$\left| \int\limits_S f dS \right| \le \int\limits_S |f| dS \,.$$

Упражнение 1.1 Доказать теоремы 1.3 и 1.4.

2 Дифференциальные формы

Определение 2.1 *Дифференциальной формой ранга k* (короче *k-формой*) называется конечная сумма

$$w = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} a_{i_1 \ldots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \,, \tag{2.1}$$

где $a_{i_1\dots i_k}(x)$ — *коэффициенты k-формы* — функции, заданные на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и непрерывно дифференцируемые столько раз, сколько будет необходимо; $dx^{i_1}, \dots, dx^{i_k}$ — дифференциалы, если эта сумма подчиняется следующим условиям:

(i) Перемена местами слагаемых в сумме (2.1) не изменяет ее.

(ii) Замена слагаемого $a_{i_1\dots i_k}(x)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ суммой

$$a^1_{i_1\dots i_k}(x)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + a^2_{i_1\dots i_k}(x)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

и наоборот неизменяет сумму (2.1), если $a_{i_1\dots i_k}(x) = a^1_{i_1\dots i_k}(x) + a^2_{i_1\dots i_k}(x)$.

(iii) Перемена местами двух дифференциалов в каком-либо слагаемом $a_{i_1\dots i_k}(x)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ сопровождается изменением знака перед коэффициентами $a_{i_1\dots i_k}(x)$.

Из (iii) следует, что если слагаемое $a_{i_1\dots i_k}(x)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ содержит два одинаковых дифференциала, то это слагаемое тождественно равно нулю. Если в результате операций (i)-(iii) k-форма (2.1) обратиться в тождественный нуль, то такая k-форма называется *нулевой*. Нулевую форму не следует путать с k-формой *ранга нуль*, которой по определению называется произвольная неоюходимое число раз непрерывно дифференцируемая функция $f = f(x)$.

Упражнение 2.1 Пусть в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ задана k-форма w. Показать, что

а) $w \equiv 0$, если $k > n$;

б) $w = a(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, если $k = n$.

Введем в расмотрение арифметические операции над дифференциальными формами.

Определение 2.2 *Суммой* двух k-форм

$$w_1 = \sum a(x)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \text{ и } w_2 = \sum b(x)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

называется k-форма вида

$$w_1 + w_2 = \sum (a(x) + b(x))dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\,.$$

Произведением k-формы

$$w_1 = \sum a(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

и l-формы

$$w_2 = \sum b(x) dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l}$$

называется $(k+l)$-форма вида

$$w_1 \wedge w_2 = \sum a(x) b(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l}.$$

(Здесь и далее индексы у коэффициентов дифференциальных форм и у знака суммы для краткости опускаются.)

Упражнение 2.2 Пусть в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ заданы k-форма w_1 и l-форма w_2. Показать, что $w_1 \wedge w_2 \equiv 0$, если $k + l > n$.

Теперь введем в обиход операцию дифференцирования k-форм.

Определение 2.3 *Дифференциалом* dw k-формы w называется $(k+1)$-форма

$$dw = \sum \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Пример 2.1 0-форма — это просто некоторая вещественная функция $f = f(x)$, определенная на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Поэтому

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i,$$

что совпадает с определением дифференциала функции f.

Часто форму dw называют *внешней производной* формы w, а форму $w_1 \wedge w_2$ называют *внешним произведением* форм w_1 и w_2. В соответствии с этим формальное исчисление, построением которого мы сейчас занимаемся, называют *внешним дифференциальным исчислением.*

Теорема 2.1 *(i) Пусть w_1 и w_2 есть k- и l-формы соответственно. Тогда*

$$d(w_1 \wedge w_2) = dw_1 \wedge w_2 + (-1)^k w_1 \wedge dw_2\,.$$

(ii) Пусть w есть k-форма, тогда $d^2 w \equiv 0$.

○ (i) В силу определений 2.2 и 2.3 имеем

$$d(w_1 \wedge w_2) = d\sum a(x)b(x)dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l} =$$

$$\sum (b(x)da(x) + a(x)db(x))dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l} =$$

$$= \sum \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a(x)}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \wedge w_2 +$$

$$+(-1)^k w_1 \wedge \sum \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b(x)}{\partial x^i} dx^i \right) \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l} =$$

$$= dw_1 \wedge w_2 + (-1)^k w_1 \wedge dw_2\,.$$

(ii) В силу определения 2.3 имеем

$$d^2 w = d\sum \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a(x)}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} =$$

$$= \sum \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 a(x)}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \right) \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} =$$

$$= \sum \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 a(x)}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

Поскольку в $(k+2)$-форме $d^2 w$ есть слагаемые

$$\frac{\partial^2 a(x)}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

и

$$\frac{\partial^2 a(x)}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\,,$$

то в силу определения 2.1 $d^2 w \equiv 0$. •

Определение 2.4 Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^k_t$ — область, $S \subset \mathbb{R}^n_x$ — поверхность, $\varphi : \Omega \to S$ — диффеоморфизм. Пусть на поверхности S задана l-форма

$$w = \sum a(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_l}\,.$$

Переносом l-формы w с поверхности S на область Ω называется l-форма

$$\varphi^* w = \sum a \circ \varphi(t) \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \varphi^{i_1}}{\partial t^j} dt^j \right) \wedge \ldots \wedge \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \varphi^{i_l}}{\partial t^j} dt^j \right)\,,$$

где $\varphi^{i_1}, \ldots, \varphi^{i_l}$ — соответственно $i_1, \ldots, i_l$-тые компоненты диффеоморфизма φ.

Упражнение 2.3 Показать, что $\varphi^* w \equiv 0$, если $l > k$.

Упражнение 2.4 Пусть $l = k$. Показать, что

$$\varphi^* w = \sum a \circ \varphi(t) \frac{\partial(\varphi^{i_1}, \ldots, \varphi^{i_k})}{\partial(t^1, \ldots, t^k)} dt^1 \wedge dt^k\,,$$

где $\dfrac{\partial(\varphi^{i_1}, \ldots, \varphi^{i_k})}{\partial(t^1, \ldots, t^k)}$ — якобиан отображения $\mathrm{col}(\varphi^{i_1}, \ldots, \varphi^{i_k})$.

Теорема 2.2 *Пусть Ω, S и φ — те же, что и в определении 2.4. Пусть на поверхности S заданы l- и m-формы w_1 и w_2. Тогда*

(i) $\varphi^*(w_1 + w_2) = \varphi^* w_1 + \varphi^* w_2$, если $l = m$;
(ii) $\varphi^*(w_1 \wedge w_2) = \varphi^* w_1 \wedge \varphi^* w_2$;
(iii) $\varphi^*(dw_1) = d(\varphi^* w_1)$, если $\varphi \in C^2(\Omega; S)$.

$\circ$ Утверждения (i) и (ii) вытекают непосредственно из определений 2.2 и 2.4. Докажем утверждение (iii).

Из определений 2.3 и 2.4 вытекает, что

$$\varphi^*(dw_1) = \varphi^* \sum \frac{\partial a}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_l} =$$

$$= \sum \frac{\partial a}{\partial x^i} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi^{i_1}}{\partial t^j} dt^j \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi^{i_2}}{\partial t^j} dt^j \right) \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi^{i_l}}{\partial t^j} dt^j \right) =$$

$$= \sum \frac{\partial a}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \frac{\partial \varphi^{i_2}}{\partial t^{j_2}} \ldots \frac{\partial \varphi^{i_l}}{\partial t^{j_l}} dt^{j^1} \wedge dt^{j^2} \wedge \ldots dt^{j^l}.$$

С другой стороны

$$d\varphi^*(dw_1) = d \sum a \circ \varphi(t) \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi^{i_1}}{\partial t^j} dt^j \right) \wedge \ldots \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi^{i_l}}{\partial t^j} dt^j \right) =$$

$$= d \sum a \circ \varphi(t) \frac{\partial \varphi^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \ldots \frac{\partial \varphi^{i_l}}{\partial t^{j_l}} dt^{j_1} \wedge \ldots dt^{j_l} =$$

$$\begin{aligned} &= \sum \left(\sum \frac{\partial a}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^j} dt^j \right) \wedge \frac{\partial \varphi^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \ldots \frac{\partial \varphi^{i_l}}{\partial t^{j_l}} dt^{j_1} \wedge \ldots dt^{j_l} + \\ &+ \sum a \circ \varphi(t) d \left(\frac{\partial \varphi^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \ldots \frac{\partial \varphi^{i_l}}{\partial t^{j_l}} \right) \wedge dt^{j_1} \wedge \ldots dt^{j_l} = \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$= \sum \frac{\partial a}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^{j_0}} \frac{\partial \varphi^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \ldots \frac{\partial \varphi^{i_l}}{\partial t^{j_l}} dt^{j_0} \wedge dt^{j_1} \wedge dt^{j_2} \wedge \ldots dt^{j_l},$$

поскольку второе слагаемое в (2.2) равно нулю в силу теоремы 2.1 (ii). Итак, $d(\varphi^* w) = \varphi^*(dw)$, что и требовалось доказать. •

3 Определение и свойства поверхностного интеграла второго рода

Поверхностные интегралы второго рода — это интегралы от k-форм, определенных на k-мерных поверхностях.

Определение 3.1 (i) Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^k_t$ — измеримая область, на которой задана k-форма $w = a(t)dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^k$. *Поверхностным интегралом второго рода* называется интеграл

$$\int_\Omega w = \int_\Omega a(t) dt^1 \ldots dt^k, \tag{3.1}$$

где в правой части равенства стоит кратный интеграл Римана.

(ii) Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^k_t$ — измеримая область, $S \subset \mathbb{R}^n_x$ — ориентированная поверхность, на которой задана k-форма w, $\varphi : \Omega \to S$ — диффеоморфизм. *Поверхностным интегралом второго рода* называется интеграл

$$\int\limits_S w = \pm \int\limits_\Omega \varphi^* w\,,$$

где правая часть равенства определяется посредством (3.1), причем знак "+" берется, если диффеоморфизм φ сохраняет ориентацию, а знак "$-$" берется в противном случае.

Как и в случае поверхностного интеграла первого рода поверхностный интеграл второго рода оказывается зависящим от диффеоморфизма φ. Покажем, что в действительности такой зависимости не существует. Рассмотрим сначала простейшую ситуацию.

Лемма 3.1 *Пусть $\Omega_t \subset \mathbb{R}^k_t$ и $\Omega_S \subset \mathbb{R}^k_S$ — две ориентированные измеримые области, причем на Ω_t задана k-форма $w = a(t)dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^k$. Пусть существует диффеоморфизм $\delta : \Omega_S \to \Omega_t$. Тогда*

$$\int\limits_{\Omega_t} w = \pm \int\limits_{\Omega_S} \delta^* w\,,$$

где знак "+" или "$-$" выбирается в зависимости от того, сохраняет или нет ориентацию области Ω_t диффеоморфизм δ.

∘ В силу определения 3.1 (i) имеем

$$\int\limits_{\Omega_t} w = \int\limits_{\Omega_t} a(t)dt^1 \ldots dt^k\,.$$

Отсюда в силу теоремы о замене переменных в кратном интеграле получаем

$$\int\limits_{\Omega_t} a(t)dt^1 \dots dt^k = \int\limits_{\Omega_S} a \circ \delta(s)|\det J_\delta| ds^1 \dots ds^k =$$
$$= \int\limits_{\Omega_s} a \circ \delta(s)|\det J_\delta| ds^1 \wedge \dots \wedge ds^k\,. \tag{3.2}$$

заметим, что

$$\det J_\delta ds^1 \wedge \dots \wedge ds^k = \left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial \delta^1}{\partial s^i} dt^i\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial \delta^k}{\partial s^i} dt^i\right)\,.$$

Кроме того, заметим, что диффеоморфизм δ сохраняет ориентацию области Ω_t точно тогда, когда $\det J_\delta(s) > 0\ \forall s \in \Omega_s$. Поэтому

$$a \circ \delta(s)|\det J_\delta| ds^1 \wedge \dots \wedge ds^k = \pm \delta^* w\,.$$

Отсюда и из (3.2) вытекает утверждение теоремы. •

Теперь расмотрим одтн частный случай фундаментального свойства дифференциальных форм.

Лемма 3.2 *Пусть $S \subset \mathbb{R}^n_x$ — k-мерная поверхность с заданной на ней k-формой w. Пусть $\Omega_t \subset \mathbb{R}^k_t$ и $\Omega_s \subset \mathbb{R}^k_s$ — области, а $\varphi : \Omega_t \to S$ и $\delta : \Omega_s \to \Omega_t$ — диффеоморфизмы. Тогда*

$$(\varphi \circ \delta)^* w = \delta^*(\varphi^* w)\,.$$

$\circ$ Пусть $w = \sum a(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ — k-форма, определенная на S. Тогда

$$\delta^*(\varphi^* w) = \delta^* \sum a \circ \varphi(t) \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial \varphi^{i_1}}{\partial t^j} dt^j\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial \varphi^{i_k}}{\partial t^j} dt^j\right) =$$

$$= \sum (a \circ \varphi) \circ \delta(s) \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial \varphi^{i_1}}{\partial t^j} \left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial \delta^j}{\partial s^i} ds^i\right)\right) \wedge \dots$$

$$\ldots \wedge \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \varphi^{i_k}}{\partial t^j} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \delta^j}{\partial s^i} ds^i \right) \right) =$$

$$= \sum a \circ (\varphi \circ \delta)(s) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial (\varphi \circ \delta)^{i_1}}{\partial s^i} ds^i \right) \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial (\varphi \circ \delta)^{i_k}}{\partial s^i} ds^i \right) = (\varphi \circ \delta)^* w \, .$$

Здесь первое, второе и четвертое равенства верны по определению, а третье справедливо в силу теоремы о дифференцировании композиции функций. •

Замечание 3.1 Как видно из доказательства лемма 3.2 справедлива независимо от ранга формы w.

Теперь, наконец, сформулируем и докажем теорему о корректности определения 3.1 (ii).

Теорема 3.1 *Пусть $S \subset \mathbb{R}^n_x$ -k-мерная ориентированная поверхность, на которой задана k-форма w. Пусть $\Omega_t \subset \mathbb{R}^k_t$, $\Omega_s \subset \mathbb{R}^k_s$ — две измеримые ориентированные области, а $\varphi : \Omega_t \to S$ и $\psi : \Omega_s \to S$ — диффеоморфизмы. Тогда*

$$\int\limits_{\Omega_t} \varphi^* w = \pm \int\limits_{\Omega_s} \psi^* w \, ,$$

причем знак “+” берется, если оба диффеоморфизма одновременно сохраняют или не сохраняют ориентацию S, а знак “−” — в противном случае.

∘ Поскольку $\psi = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \psi = \varphi \circ \delta$, где $\delta = \varphi^{-1} \circ \psi : \Omega_s \to \Omega_t$ — диффеоморфизм, то в силу леммы 3.2 имеем $\psi^* w = (\varphi \circ \delta)^* w = \delta^*(\varphi^* w)$. Поэтому в силу леммы 3.1 получаем

$$\int\limits_{\Omega_t} \varphi^* w = \pm \int\limits_{\Omega_s} \delta^*(\varphi^* w) = \pm \int\limits_{\Omega_s} \psi^* w \, ,$$

причем знак "+" берется, если $\det J_\delta > 0$, а знак "$-$" — в противном случае. Понятно, что в первом случае диффеоморфизмы φ и ψ либо оба сохраняют, либо оба не сохраняют ориентацию поверхности S, а во втором случае один из диффеоморфизмов сохраняет ориентацию, а второй — нет. •

В заключении отметим, что поскольку интеграл от k-формы определяется через кратный интеграл Римана, то естественно ожидать, что первый наследует некоторые свойства второго.

Упражнение 3.1 Пусть $S \subset \mathbb{R}^n_x$ — k-мерная ориентированная поверхность, на которой задана k-форма w. Пусть $S = S_1 \cup S_2$, причем $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Показать, что

$$\int\limits_S w = \int\limits_{S_1} w + \int\limits_{S_2} w\,.$$

Упражнение 3.2 Пусть $S \subset \mathbb{R}^n_x$ — k-мерная ориентированная поверхность, на которой заданы две k-формы w_1 и w_2. Показать, что

$$\int\limits_S (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 \int\limits_S w_1 + \alpha_2 \int\limits_S w_2 \quad \forall \alpha_i \in \mathbb{R} \ i = 1, 2\,.$$

4 Переход от поверхностного интеграла первого рода к поверхностному интегралу второго рода

Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ — k-мерная поверхность, $\varphi : \Omega \to S$ диффеоморфизм, $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ — измеримая область. Тогда интеграл

$$\int\limits_S dS = \int\limits_\Omega \sqrt{\det G_\varphi} dt \tag{4.1}$$

естественно называть *k-мерным объемом* поверхности S. Обозначим этот интеграл символом $|S|$.

Теперь предположим вдобавок, что S — ориентированная поверхность, на которой задана *форма объема*, т. е. такая k-форма

$$w = \sum a(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\,,$$

что
$$\int\limits_S w = |S|\,. \tag{4.2}$$
Пусть диффеоморфизм φ сохраняет ориентацию поверхности S. Тогда из (4.1), (4.2) получаем
$$\int\limits_\Omega \sqrt{\det G_\varphi}dt = \int\limits_\Omega \sum a(x)\circ\varphi(t)\frac{\partial(\varphi^{i_1},\ldots,\varphi^{i_k})}{\partial(t^1,\ldots,t^k)}dt\,.$$
Поскольку полученное выражение не зависит от области Ω, то
$$\sqrt{\det G_\varphi} = \sum a(x)\circ\varphi(t)\frac{\partial(\varphi^{i_1},\ldots,\varphi^{i_k})}{\partial(t^1,\ldots,t^k)}\,.$$

Вообще говоря, из этого выражения трудно найти коэффициенты формы w — функции $a(x)$. Однако в некоторых частных, но важных случаях это довольно просто.

Случай 1. Пусть $k=1$, т. е. поверхность S в данной ситуации есть гладкая кривая, являющаяся образом диффеоморфизма $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}^n$, где
$$\varphi(t) = \operatorname{col}(\varphi^1(t),\ldots,\varphi^n(t))\,.$$
Ориентация S задается единичным касательным вектором
$$\tau(x) = \operatorname{col}(\tau^1(x),\ldots,\tau^n(x))\,,$$
причем считаем, что диффеоморфизм φ сохраняет ориентацию, т. е.
$$\tau^i(x) = \frac{(\varphi^i)'_t}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^n((\varphi^i)'_t)^2}}\,,\quad x=\varphi(t)\,,\ i=1,\ldots,n\,.$$

Тогда форма объема (в действительности — длины) поверхности S задается формулой
$$w = \sum_{i=1}^n \tau^i(x)dx^i\,.$$

Действительно,

$$\sum_{i=1}^{n} \tau^i \circ \varphi(t) \frac{\partial \varphi^1}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\varphi^i)'_t}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}((\varphi^i)'_t)^2}} (\varphi^i)'_t =$$

$$= \sqrt{\sum_{j=1}^{n}((\varphi^i)'_t)^2} = \sqrt{\det G_\varphi}\,.$$

Случай 2. Пусть $k = n-1$, т. е. поверхность S в данной ситуации есть гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$, являющаяся образом диффеоморфизма, т. е.

$$\varphi(t) = \mathrm{col}(\varphi^1(t^1, \ldots, t^{n-1}), \ldots, \varphi^n(t^1, \ldots, t^{n-1}))\,.$$

Пусть ориентация S задается единичной нормалью

$$\nu(x) = \mathrm{col}(\nu^1(x), \ldots, \nu^n(x))\,,$$

причем диффеоморфизм φ сохраняет эту ориентацию, т. е. определитель матрицы

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial t^1} & \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial t^2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial t^{n-1}} & \nu^1 \circ \varphi \\ \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial t^1} & \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial t^2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial t^{n-1}} & \nu^2 \circ \varphi \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \varphi^n}{\partial t^1} & \dfrac{\partial \varphi^n}{\partial t^2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi^n}{\partial t^{n-1}} & \nu^n \circ \varphi \end{pmatrix}$$

строго положителен. Как известно, $\det \Phi(t)$ есть объем параллелепипеда, натянутого на касательные векторы

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t^i} = \mathrm{col}\left(\frac{\partial \varphi^1}{\partial t^i}, \frac{\partial \varphi^2}{\partial t^i}, \cdots, \frac{\partial \varphi^n}{\partial t^i}\right) \quad i = 1, \ldots, n-1\,,$$

и нормаль ν. В силу этого и геометрического смысла определителя Грама имеем

$$\det \Phi = |\nu| \sqrt{\det G_\varphi} = \sqrt{\det G_\varphi}\,.$$

Теперь рассмотрим форму

$$w = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \nu^i(x) dx^1 \wedge \ldots \wedge \hat{dx}^i \wedge \ldots \wedge dx^n \,,$$

где “крышка” над дифференциалом dx^i означает, что в этом слагаемом он отсутствует. Перенос этой формы с поверхности S на область Ω дает

$$\varphi^* w = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \nu^i \circ \varphi(t) \frac{\partial(\varphi^1, \ldots, \hat{\varphi}^i, \ldots, \varphi^n)}{\partial(t^1, \ldots, t^i, \ldots, t^{n-1})} dt =$$

$$= \det \Phi(t) dt \,.$$

Итак, форма w является в нашем случае формой объема.

Замечание 4.1 Если мы умеем находить форму объема, то переход от интеграла первого рода к интегралу второго рода очевидно задается формулой

$$\int\limits_S f dS = \int\limits_S f w \,,$$

где под интегралом в правой части стоит умножение 0-формы f на k-форму объема w.

5 Переход от поверхностного интеграла второго рода к поверхностному интегралу первого рода

Здесь мы тоже ограничимся рассмотрением только двух случаев.

Случай 1. Пусть $k = 1$, и на одномерной ориентированной поверхности S задана 1-форма

$$w = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx^i \,.$$

Пусть $\varphi : (a, b) \to S$ — диффеоморфизм, $\varphi(t) = \mathrm{col}(\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t))$, $t \in (a, b)$. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_S w = \pm \int\limits_a^b \varphi^* w = \pm \int\limits_a^b \sum_{i=1}^n a_i \circ \varphi(t) \frac{\partial \varphi^i}{\partial t} dt =$$

$$= \pm \int\limits_a^b \sum_{i=1}^n a_i \circ \varphi(t) \frac{\partial \varphi^i}{\partial t} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial t} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial t} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt\,. \tag{5.1}$$

Заметим, что во-первых величины

$$\frac{\dfrac{\partial \varphi^i}{\partial t}}{\sqrt{\displaystyle\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial t} \right)^2}} \quad i = 1, \ldots, n$$

есть компоненты единичного касательного вектора к поверхности S, в точке $x = \varphi(t)$, т. е. $\tau(x) = \mathrm{col}(\tau^1(x), \ldots, \tau^n(x))$, где

$$\tau^i \circ \varphi(t) = \frac{\dfrac{\partial \varphi^i}{\partial t}}{\sqrt{\displaystyle\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial t} \right)^2}} \quad i = 1, \ldots, n\,,$$

а во-вторых,

$$\sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial t} \right)^2} = \sqrt{\det G_\varphi}\,,$$

где G_φ — матрица Грамма диффеоморфизма φ. Поэтому продолжая цепочку равенств (5.1), получим

$$\int\limits_S w = \pm \int\limits_a^b \sum_{i=1}^n (a_i \circ \varphi(t))(\tau^i \circ \varphi(t)) \sqrt{\det G_\varphi} dt =$$

$$= \pm \int\limits_S \sum_{i=1}^n a_i(x) \tau^i(x) dS\,,$$

где знак “+” берется, если диффеоморфизм $\varphi : (a, b) \to S$ сохраняет ориентацию поверхности S, а знак “$-$” в противном случае. Другими словами, знак “+” берется в случае, когда касательный вектор τ совпадает с ориентацией поверхности S, а знак “$-$” в противном случае.

Случай 2. Пусть $k = n - 1$, и на $(n-1)$-мерной ориентированной нормалью $\nu(x) = (\nu^1(x), \ldots, \nu^n(x))$ поверхности S задана $(n-1)$-форма

$$w = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i(x) dx^1 \wedge \ldots \wedge \hat{dx}^i \wedge \ldots \wedge dx^n .$$

Пусть $\varphi : \Omega \to S$ — диффеоморфизм, сохраняющий ориентацию поверхности S, а $\Omega \subset \mathbb{R}_t^{n-1}$ — измеримая ориентированная область. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_S w = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i \circ \varphi(t) \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi^1}{\partial t^j} dt^j \right) \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\hat{\partial \varphi}^i}{\partial t^j} dt^j \right) \wedge \ldots \wedge \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi^n}{\partial t^j} dt^j \right) .$$

Заметим теперь, что

$$\begin{gathered} \nu^i \circ \varphi(t) \sqrt{\det G_\varphi} = \\ = (-1)^{i-1} \det \left(\tfrac{\partial \varphi}{\partial t^1}, \ldots, \tfrac{\partial \varphi}{\partial t^{n-1}}, e_i \right) \quad i = 1, \ldots, n . \end{gathered} \tag{5.2}$$

Действительно, объем параллелепипеда, натянутого на векторы $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t^1}, \ldots, \dfrac{\partial \varphi}{\partial t^{n-1}}$ и вектор $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (единица стоит на i-том месте), равен произведению основания $\sqrt{\det G_\varphi}$ на высоту $\nu^i = < \nu, e_i >$.

Из (5.2) получаем

$$\det\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t^1},\dots,\frac{\partial\varphi}{\partial t^{n-1}},e_i\right)dt^1\dots dt^{n-1}=$$
$$=\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi^1}{\partial t^j}dt^j\right)\wedge\dots\wedge\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\hat{\varphi}^i}{\partial t^j}dt^j\right)\wedge\dots \tag{5.3}$$
$$\dots\wedge\left(\sum_{j=1}^{n-1}\tfrac{\partial\varphi^n}{\partial t^j}dt^j\right).$$

Учитывая (5.2) и (5.3), окончательно получим

$$\int\limits_S w=\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n(a_i\circ\varphi(t))(\nu^i\circ\varphi(t))\sqrt{\det G_\varphi(t)}dt^1\dots dt^{n-1}=$$

$$=\int\sum_{i=1}^n a_i(x)\nu^i(x)dS\,.$$

Замечание 5.1 Поскольку $\nu^i=<\nu,e_i>=\cos\alpha_i$, где α_i — угол между нормалью ν^i $i=1,\dots,n$ нормали ν называют *направляющими косинусами.*

6 Формула Стокса

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^k_t$ — замкнутая область, $\overset{\circ}{\Omega}$ — ее внутренность, а $\partial\Omega$ — граница, которая является $(k-1)$-мерной поверхностью. *Поверхностью с краем* $S\subset\mathbb{R}^n_x$, $n\geq k$ называется образ $\varphi[\Omega]\subset\mathbb{R}^n_x$ диффеоморфизма $\varphi:\Omega\to S=\varphi[\Omega]$. Образ внутренности $\varphi[\overset{\circ}{\Omega}]=\overset{\circ}{S}$ будет называться по-прежнему поверхностью, а образ границы $\varphi[\partial\Omega]=\partial S$ называется *краем поверхности.*

Заметим, что край поверхности и граница поверхности, вообще говоря, разные понятия. Дело здесь в том, что поверхность S может не иметь внутренности, и тогда ее граница совпадает с ее замыканием.

В дальнейшем мы всегда считаем край ∂S $(k-1)$-мерной поверхностью без края, либо конечным объединением таких поверхностей. Если через “∂” обозначить формальную операцию "взятия края" некоторой поверхности S, то мы получим $\partial(\partial S) = \partial^2 S = \emptyset$. Отметим здесь далеко идущую аналогию с k-формами — $d(dw) = d^2 w = 0$, которая не случайна и приведет нас к фундаментальной теореме Стокса[17].

Поскольку край ∂S поверхности S тоже поверхность, то край ∂S тоже может быть ориентирован. Нам необходимо выяснить, как согласовать ориентацию поверхности S и ее края ∂S. Итак, пусть поверхность поверхность S и ее край ∂S ориентированы. Возьмем для точки $x \in \partial S$ плоскость $T_x S$, касательную к поверхности S. Выберем в $T_x S$ базис $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$, лежащий в классе ориентации поверхности S, таким образом, чтобы вектор ξ_1 лежал на нормали к ∂S и был направлен в сторону, внешнюю по отношению к локальной проекции S на $T_x S$, а векторы $\{\xi_2, \ldots, \xi_k\} \subset T_x S$. Но в $T_x \partial S$ тоже можно выбрать ориентирующий базис $\{\xi'_1, \ldots, \xi'_{k-1}\}$. Так вот, ориентации поверхности S и ее края ∂S называются *согласованными*, если в любой точке $x \in \partial S$ базисы $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ и $\{\xi'_1, \ldots, \xi'_{k-1}\}$ лежат в одном классе ориентации.

Пример 6.1 Одномерная поверхность $S \subset \mathbb{R}^n_x$, ориентированная касательным вектором τ, в качестве края ∂S имеет две точки A и B, которые тривиальным образом ориентированы.

Пример 6.2 Пусть двумерная поверхность $\Omega \subset \mathbb{R}^2_x$ имеет в качестве края границу $\partial\Omega$. Если область Ω стандартно ориентированная, то ее край можно согласованно ориентировать, указав направление обхода "против часовой стрелки".

Пример 6.3 Пусть двумерная поверхность $S \subset \mathbb{R}^3_x$ ориентирована нормалью ν. Вектор e_2 указывает направление движения по краю ∂S, задавая тем самым ориентацию ∂S, согласованную с ориентацией поверхности S (Напомним, что ориентация пространства $\mathbb{R}^3_x$ всегда предполагается стандартной).

[17] Джордж Габриель Стокс (1819-1903) — английский математик, механик и физик. Основные работы в области механики, гидродинамики, теории упругости, оптики и математической физики.

Пример 6.4 Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^3_x$ ориентирована стандартно. Тогда ее граница $\partial\Omega$ (фактически, край) ориентируется внешней нормалью $\nu = e_1$ для того, чтобы ориентации были согласованными.

Теорема 6.1 *Пусть $S \subset \mathbb{R}^n_x$ — k-мерная ориентированная поверхность с краем ∂S, причем ориентация поверхности и края согласованы. Пусть на поверхности S и ее крае ∂S определена $(k-1)$-форма w. Тогда*

$$\int\limits_S dw = \int\limits_{\partial S} w\,. \tag{6.1}$$

Формула (6.1) называется *формулой Стокса*. Доказательство формулы Стокса очень сложно в техническом отношении, поэтому оно опускается.

7 Следствия из формулы Стокса

Ниже мы приведем классические формулы математического анализа, в которых вместо обычных здесь обозначений координат x^1, x^2, x^3 будем использовать традиционные обозначения x, y, z. Напомним, что пространство, в котором лежит ориентированная поверхность с краем, всегда ориентированно стандартно.

Формула Ньютона[18]-Лейбница[19]. Пусть $k = n = 1$. Одномерная поверхность S с краем ∂S в пространстве $\mathbb{R}$ — это ориентированный отрезок $[a, b]$, концы которого — точки a и b — ориентированы "$-$" и "$+$" соответственно. Нуль-форма w — это функция $f = f(x)$, непрерывно дифференцируемая достаточное число раз. Применяя формулу Стокса, получаем

$$\int\limits_{[a,b]} df = \int\limits_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)\,.$$

[18]Исаак Ньютон (1643-1727) — английский математик, физик, механик, астроном, Основоположник современной механики и математического анализа.

[19]Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646-1716) — немецкий математик, физик, философ, юрист, языковед. Основоположник математического анализа.

Формула Грина[20]. Пусть $k = n = 2$. Двумерная поверхность S на плоскости $\mathbb{R}^2$ (Фактически область S) ориентирована стандартным образом. Поэтому ее край ∂S нужно ориентировать движением "против часовой стрелки". 1-форма w имеет вид

$$w = Pdx + Qdy\,,$$

где $P = P(x, y)$ и $Q = Q(x, y)$ — функции двух переменных, непрерывно дифференцированные достаточное число раз. Применяя формулу Стокса, получим

$$\int\limits_{\partial S} w = \int\limits_{\partial S} Pdx + Qdy = \int\limits_{S} dw =$$

$$= \int\limits_{S} \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right) \wedge dy =$$

$$= \int\limits_{S} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy\,.$$

Отсюда окончательно выводим, что

$$\int\limits_{\partial S} Pdx + Qdy = \int\limits_{S} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\,.$$

Классическая формула Стокса. Пусть $n = 3$, а $k = 2$. Двумерная поверхность S ориентирована нормалью, причем ориентация края ∂S согласована с ориентацией поверхности. 1-форма w имеет вид

$$w = Pdx + Qdy + Rdz\,,$$

где $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ и $R = R(x, y, z)$ функции трех переменных, непрерывно дифференцируемые достаточное число раз. Применяя формулу Стокса, получим

$$\int\limits_{\partial S} w = \int\limits_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{S} w =$$

[20]Джордж Грин (1793-1841) — английский математик и физик. Основные исследования относятся к математической физике

$$= \int\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy +$$

$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx\,.$$

Пусть $\cos\alpha, \cos\beta$ и $\cos\gamma$ — направляющие косинусы ориентирующей нормали. Используя формулу перехода к поверхностному интегралу первого рода, последний интеграл запишем в виде

$$\int\limits_S \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right] dS\,.$$

Окончательно классическая формула Стокса приобретет вид

$$\int\limits_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS\,.$$

Формула Гауса[21]-Остроградского[22]. Пусть $k = n = 3$. Трехмерная поверхность S в пространстве $\mathbb{R}^3$ (фактически область S) ориентирована стандартно. Тогда ее край ∂S (фактически граница ∂S) должна быть ориентирована внешней нормалью для того, чтобы ориентации края и поверхности были согласованы. 2-форма w имеет вид

$$w = Rdx \wedge dy + Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx\,,$$

где $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$ и $R = R(x,y,z)$ функции описанные выше. Применяя формулу Стокса, получим

$$\int\limits_{\partial S} w = \int\limits_{\partial S} Rdx \wedge dy + Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx =$$

[21] Каол Фридрих Гаусс (1777 -1855) — немецкий математик, астроном, геодезист. Весьма плодотворно работал практически во всех современных ему разделах математики.

[22] Михаил Васильевич Остроградский (1801-1862) — русский математик и механик. Работы относятся к аналитической механике, гидродинамике, теории упругости, небесной механике, математической физике, математическому анализу и теории дифференциальных уравнений.

$$= \int\limits_S dw = \int\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz\,.$$

Пусть $\cos\alpha, \cos\beta$ и $\cos\gamma$ — направляющие косинусы ориентирующей нормали. Переходя к поверхностному интегралу первого рода, окончательно получим

$$\int\limits_{\partial S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS =$$

$$= \int\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz\,.$$

8 Элементы векторного анализа

Здесь мы считаем пространство $\mathbb{R}^3$ с традиционными координатами ориентированным стандартным базисом $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$, $k = (0,0,1)$. Пусть каждой точке (x,y,z) некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ поставлен в соответствие вектор с координатами (P,Q,R), который мы будем записывать в виде $Pi+Qj+Rk$. Тогда мы будем говорить, что в области Ω задано *векторное поле* $\vec{a} = Pi + Qj + Rk$. (Другими словами, в области Ω задана вектор-функция $\vec{a} : \Omega \to \mathbb{R}^3$). Если же в области Ω задана некоторая функция $u = u(x,y,z)$, то мы будем говорить, что в области Ω задано *скалярное поле.*

Определение 8.1 Пусть в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ заданы скалярное и векторное поля $u \in C^1(\Omega;\mathbb{R})$ и $\vec{a} \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$. Тогда определены следующие дифференциальные операторы

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k\,,$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} == \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\,,$$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Операция grad называется *градиентом*, операция div называется *дивергенцией*, а операция rot — *ротором* или *вихрем.* Векторное поле $\vec{a}$, для которого существует скалярное поле u такое, что $\vec{a} = \operatorname{grad} u$, называется *потенциальным*, причем поле u называется *потенциалом* векторного поля $\vec{a}$. Векторное поле $\vec{a}$, для которого $\operatorname{div}\vec{a} = 0$ или $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$, называется соответственно *соленоидальным* или *безвихревым.* Дифференциальный оператор

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k$$

называется *оператором Гамильтона*[23] *“набла”*

Введенные дифференциальные операторы над скалярными и векторными полями порождают целую науку, называемую *векторным дифференциальным исчислением.* Приведем некоторые формулы этой науки, доказательства которых предлагаем в качестве упражнений.

Упражнение 8.1 Доказать, что

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0\,,$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \nabla x(\nabla u) = 0\,.$$

Введем теперь интегральные операции над векторными полями.

Определение 8.2 Пусть γ — замкнутая гладкая кривая в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Интеграл

$$\oint\limits_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \oint\limits_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz\,,$$

[23]Вильям Роуэн Гамильтон (1805-1865) — ирландский математик. Основные работы посвящены математической оптике, механике, вариационному исчислению.

где $d\vec{r} = dxi + dyj + dzk$, $\vec{a} = Pi + Qj + Rk$, называется *циркуляцией* векторного поля $\vec{a}$ по контуру γ.

Теорема 8.1 *Циркуляция непрерывно дифференцируемого потенциального векторного поля по любой замкнутой гладкой кривой равна нулю.*

∘ Пусть γ — замкнутая гладкая кривая, тогда в силу классической формулы Стокса имеем

$$\oint\limits_{\gamma} \nabla u \cdot d\vec{r} = \int\limits_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz =$$

$$= \int\limits_{S} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}\right) dy \wedge dz +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\right) dx \wedge dz\,,$$

где S — *любая* поверхность, натянутая на γ. •

Определение 8.3 Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ — двумерная поверхность, ориентированная нормалью $\nu = \cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\gamma k$. Интеграл

$$\int\limits_{S} \vec{a} \cdot \vec{\nu} dS = \int\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS$$

называется *потоком* векторного поля $\vec{a} = Pi + Qj + Rk$ через поверхность S.

Теорема 8.2 *Непрерывно дифференцируемое векторное поле соленоидально в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ точно тогда, когда его поток через любую замкнутую поверхность $S \subset \Omega$ равен нулю.*

∘ В силу формулы Гауса-Остроградского имеем

$$\int\limits_{S} \vec{a} \cdot \vec{\nu} dS = \int\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS =$$

$$= \int\limits_{\Omega'} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \int\limits_{\Omega'} \operatorname{div} \vec{a} dxdydz\,,$$

где $\Omega' \subset \Omega$ — ограниченная поверхностью S область. •

Напоследок переформулируем классические формулы Стокса и Гауса-Остраградского в новых понятиях.

Классическая формула Стокса. Циркуляция непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{a} = Pi + Qj + Rk$ по замкнутому контуру γ равна потоку ротора этого поля через любую поверхность S, натянутую на этот контур.

$$\int\limits_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{S} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \int\limits_{S} \operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{\nu} dS\,.$$

Формула ГаусаОстроградского. Интеграл от дивергенции непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{a} = Pi + Qj + Rk$ по некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ равен потоку векторного поля через ее границу $\partial\Omega$.

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a} dxdydz = \int\limits_{\partial\Omega} \vec{a} \cdot \vec{\nu} dS\,.$$